Préparation aux oraux - Oral 3
Jeudi 16 mai 2024

Exercice avec préparation - HEC 2021 E

♡ L'avis du chef ! ♡
Exercice très classique et intéressant par l'étude de cas cas plus général de la loi logistique de paramètres m et 0...

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout réel m, on considère la fonction

$$f_m : x \longmapsto \frac{e^{-x+m}}{\left(1+e^{-x+m}\right)^2}$$

1. Question de cours. Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
   Voir cours.
2. Montrer que f_0 est paire et tracer sa courbe représentative.
   Comment en déduire la courbe représentative de f_m, pour m réel ?

Petite remarque
Bon... on a déjà étudié la parité de cette fonction au moins trois fois !

- f_0 est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f_0(-x) &= \frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^2} \\ &= \frac{e^{x}e^{-2x}}{`\left(1+e^{x}\right)^2(e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2} \\ &= f_0(x) \end{aligned}$$

Conclusion : f_0 est paire.

- f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 - 2(-e^{-x})(1+e^{-x})e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^4} \\ &= \frac{-e^{-x}(1+e^{-x}) + 2e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3} \\ &= \frac{e^{-x}(-1-e^{-x}+2e^{-x})}{(1+e^{-x})^3} \\ &= \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3} \end{aligned}$$

On en déduit rapidement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ f_0'(x) \leq 0$$

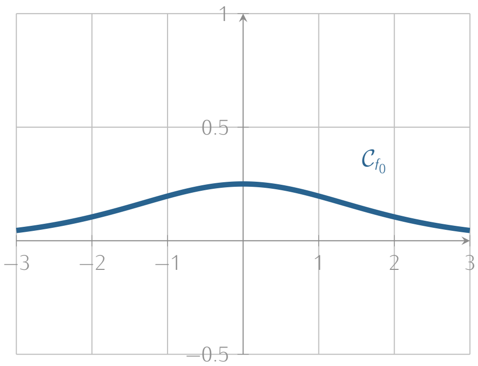
Ensuite, par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$$

On obtient ainsi le tableau de variations de f_0, complété par parité :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
f_0	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Puis la courbe de f_0 :



- Soit $m \in \mathbb{R}$. On remarque ensuite que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_m(x) = f_0(x-m)$$

Par conséquent, on obtient la courbe de la fonction f_m en translatant celle de f_0 de m par la droite, autrement dit, par une translation de vecteur $m\vec{\imath}$, où $\vec{\imath}$ est le vecteur définissant l'axe des abscisses.

3. Vérifier que f_m est une densité de probabilité.
   - f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle y est continue.
   - f_m est positive sur $\mathbb{R}$.
   - L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)dx$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$...
     - ⋆ Soit $B \in [0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^B f_m(x)dx &= \int_0^B \frac{e^{-x+m}}{(1+e^{-x+m})^2}dt \\ &= \left[\frac{1}{1+e^{-x+m}}\right]_0^B \\ &= \frac{1}{1+e^{-B+m}} - \frac{1}{1+e^m}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-B+m}} - \frac{1}{1+e^m}\right) = 1 - \frac{1}{1+e^m}$. Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_m(x)dx$ est convergente et vaut $1 - \dfrac{1}{1+e^m}$.

     - ⋆ De la même façon, on trouve que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_m(x)dx$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{1+e^m}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)dx$ est convergente et vaut 1.

Conclusion : f_m est une densité de probabilité.

4. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note X_m une variable aléatoire de densité f_m.

4.a. Soit $m \in \mathbb{R}$. Quelle est la fonction de répartition de X_m ?
Notons F_m la fonction de répartition de X_m.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}F_m(x) &= \mathbb{P}\big([X_m \le x]\big) \\ &= \int_{-\infty}^x f_m(t)dt \\ &= \left[\frac{1}{1+e^{-t+m}}\right]_{t\to-\infty}^x \\ &= \frac{1}{1+e^{-x+m}}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_m(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x+m}}$.

4.b. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

Or la fonction nulle n'est pas une fonction de répartition...

Conclusion : la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi.

5. Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que X_m admet une espérance et donner sa valeur.
   - Commençons par remarquer que X_m et $X_0 + m$ ont la même loi. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_0 + m \le x]\big) &= \mathbb{P}\big([X_0 \le x-m]\big) \\ &= F_0(x-m) \\ &= F_m(x)\end{aligned}$$

Les fonctions de répartition de $X_0 + m$ et X_m sont donc égales. Puisque la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que $X_0 + m$ et X_m ont même loi.

   - Ensuite :
     - ⋆ On sait que :

Important !
Il faut être en mesure de représenter les courbes des fonctions $x \longmapsto g(x+1)$, $x \longmapsto g(x-1)$,... où g désigne une fonction usuelle !
Exemples : courbes de $x \longmapsto \ln(1+x)$, de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$, de $x \longmapsto e^{x+2}$...
A ne pas confondre avec les courbes des fonctions $x \longmapsto g(x)+c$, qui sont des translations verticales de hauteur c (c pouvant être négatif)

Petite remarque
f_m est de la forme $\dfrac{-u'}{u^2}$...

Petite remarque
Puisque f_0 est paire, d'après ce qui a été dit en question précédente, la courbe de la fonction f_m est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = m$.
Pour cette raison, on peut calculer $\displaystyle\int_m^{+\infty} f_m(x)dx$ et dire que $\displaystyle\int_{-\infty}^m f_m(x)dx$ lui est égale...

☞ Rappel...
Une fonction de répartition est toujours :
- croissante sur $\mathbb{R}$,
- continue à droite en tout réel,
- de limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.

♣ Indication...
Montrer que $X_0 + m$ et X_m ont la même loi.

Petite remarque
Il est possible de traiter la question par la méthode "habituelle", on passe alors par une IPP et la fin est assez calculatoire... A faire pour s'entraîner ! La méthode présentée ici est assez longue à rédiger en détails, mais une très grosse partie peut être présentée à l'oral, et elle a l'avantage de n'avoir recours à aucun calcul lourd.

X_0 admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_0(t)dt$ est absolument convergente

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t|f_0(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |t|f_0(t)dt$ sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales $-\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf_0(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf_0(t)dt$ sont convergentes

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf_0(t)dt$ est convergente, par imparité de $t \longmapsto f_0(t)$ (car f_0 est paire)

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt$ est convergente

⋆ Or :

✓ par croissance comparée, on obtient :

$$\frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

✓ $\forall t \in [1;+\infty[,\ \dfrac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \geq 0,\ \dfrac{1}{t^2} \geq 0$

✓ l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente car d'exposant $2 > 1$.

Ainsi, par critère de négligeabilité sur les intégrales à intégrandes positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt$ est convergente. Or $t \longmapsto \dfrac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$ est continue sur le segment $[0;1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt$ est également convergente.

⋆ On en déduit que X_0 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf_0(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} tf_0(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} tf_0(t)dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

$t \longmapsto tf_0(t)$ est impaire, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf_0(t)dt$ est également convergente et égale à $-\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf_0(t)dt$

- Par conséquent, la variable aléatoire $X_0 + m$ admet également une espérance et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_0 + m) = m$$

Conclusion : puisque X_m et $X_0 + m$ ont même loi, on en déduit que X_m admet une espérance et $\mathbb{E}(X_m) = m$.

Compléments...

On sait que si une variable aléatoire Z possède une espérance et une densité paire, alors $\mathbb{E}(Z) = 0$.
De façon générale, si Z est une variable aléatoire possédant une espérance et une densité symétrique par rapport à un axe d'équation $x = c$, alors $\mathbb{E}(Z) = c$.
Démontrons ce résultat.
Soit Z une variable aléatoire de densité f_Z, de fonction de répartition F_Z, telle que :

- Z admet une espérance,
- la courbe de f_Z est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = c$ (avec $c \in \mathbb{R}$) ; autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(m+x) = f_Z(m-x)$$

Notons $Z_0 = Z - c$, de fonction de répartition F_{Z_0}. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_0}(x) = F_Z(x+c)$$

Par conséquent Z_0 est à densité (on vérifie les hypothèses habituelles sur F_{Z_0}) et admet pour densité la fonction f_{Z_0} définie pour presque tout réel x par $f_{Z_0}(x) = f_Z(x+c)$ (les valeurs éventuelles à fixer sont *bien choisies*...).
Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_{Z_0}(-x) &= f_Z(-x+c) \\
&= f_Z(x+c) \quad \text{par hypothèse} \\
&= f_{Z_0}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi f_{Z_0} est paire... Et puisque $Z_0 = Z - c$ et que Z admet une espérance, Z_0 admet également une espérance.
On a ainsi :

✓ Z_0 admet une espérance,

✓ Z_0 admet une densité paire.

Par conséquent :

$$\mathbb{E}(Z_0) = 0$$

À retenir...
Il peut être intéressant de se souvenir de ce résultat...

Et on en déduit, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = c$$

Conclusion : si Z est à densité, admet une espérance et admet une densité symétrique par rapport à un axe d'équation $x = c$, alors $\mathbb{E}(Z) = c$.

6. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $Y_m = \ln(1 + e^{X_m})$.

6.a. Déterminer la loi de Y_0.

★ Classique ! ★
Je ne peux que conseiller de traiter cette question pendant le temps de préparation et de faire en sorte de l'exposer pendant l'oral.

- Puisque $X_0(\Omega) = \mathbb{R}$, on obtient $Y_0(\Omega) = \mathbb{R}_*^+$...
- Notons F_{Y_0} la fonction de répartition de Y_0. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x \leq 0$:

$$\begin{array}{rcll} F_{Y_0}(x) & = & \mathbb{P}\big([Y_0 \leq x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}(\varnothing) & x \leq 0 \text{ et } Y_0(\Omega) = \mathbb{R}_*^+ \\ & = & 0 & \end{array}$$

  - ⋆ Si $x > 0$:

$$\begin{array}{rcll} F_{Y_0}(x) & = & \mathbb{P}\big([Y_0 \leq x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([\ln(1 + e^{X_0}) \leq x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([X_0 \leq \ln(e^x - 1)]\big) & \text{stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \text{ puis stricte croissance de } \exp \text{ sur } \mathbb{R} \\ & = & F_0\big(\ln(e^x - 1)\big) & \\ & = & \dfrac{1}{1 + e^{-\ln(e^x - 1)}} & \text{question 4.a} \\ & = & \dfrac{1}{1 + \frac{1}{e^x - 1}} & \\ & = & \dfrac{e^x - 1}{e^x} & \\ & = & 1 - e^{-x} & \end{array}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1...

Conclusion : $Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

6.b. En déduire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de X_0.

Voici :

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simulX0():
    Y0=rd.exponential(1)
    X0=np.log(np.exp(Y0)-1)
    return X0
```

Petite remarque
En utilisant le fait que $X_0 + m$ et X_m ont même loi, il est alors immédiat d'obtenir une simulation de X_m à partir d'une simulation de X_0.

6.c. La suite $(Y_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?

On a, de la même façon qu'en question 6.a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_{\frac{1}{n}}} = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^x - 1 + e^{\frac{1}{n}}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq 0$: on a ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_{\frac{1}{n}}} = 0$.
- Si $x > 0$: on a ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_{\frac{1}{n}}} = 1 - e^{-x}$.

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} F_{Y_{\frac{1}{n}}} = F_{Y_0}(x)$$

Conclusion : la suite $(Y_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y_0.

Exercice sans préparation – Fait maison

> **♡ L'avis du chef ! ♡**
> Très bon exercice sur les graphes...

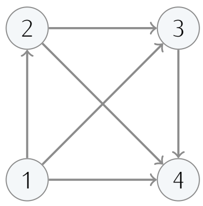
On appelle **tournoi** un graphe orienté simple tel qu'entre deux sommets distincts, il existe un et un seul arc.
On dit qu'un sommet est un roi lorsqu'il a un chemin orienté de longueur au plus 2 vers tous les autres sommets.

1. Combien un tournoi contient-il d'arcs ?
   D'après la définition, le graphe non orienté associé à un tournoi est un graphe complet... Or un graphe non orienté à n sommets possède $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes...

   > **Conclusion :** un tournoi à n sommets, possède $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arcs.

> **☞ Rappel...**
> C'est un résultat de cours qui peut se justifier rapidement en disant que, puisque le graphe est complet, il est simple et tous les sommets sont reliés entre eux. Ainsi, il y a autant d'arêtes que de sous-ensembles constitués de deux sommets. Or il y a $\binom{n}{2}$ tels sous-ensembles...

2. Donner un tournoi d'ordre 4 possédant un unique roi.
   Le graphe suivant est un tournoi d'ordre 4 dont 1 est le seul roi...



> **Petite remarque**
> Il est aussi aisé de trouver un tournoi d'ordre 4 avec 2 rois.
> On peut aussi trouver un tournoi d'ordre 5 dont chaque sommet est roi !

3. Montrer que, dans un tournoi, il existe toujours un roi.
   Soit $\mathscr{G}$ un tournoi. Notons s un sommet de degré sortant maximal.
   Montrons que s est un roi. Pour cela, raisonnons par l'absurde.
   Supposons donc qu'il existe un sommet t tel qu'il n'existe pas de chemin de longueur 1 ou 2 orienté de s vers t.
   - Puisqu'il existe un arc entre chaque paire de sommets et qu'il n'en existe pas de s vers t, alors l'arc $t \to s$ existe.
   - Puisqu'il n'existe pas de chemin de longueur 2 de s vers t, on en déduit que pour tout sommet u, si l'arc $s \to u$ existe, alors comme l'arc $u \to t$ n'existe pas, l'arc $t \to u$ existe nécessairement (car il y a toujours un arc entre deux sommets).

   De ces deux points, on en déduit que le sommet t a un degré sortant strictement supérieur à celui de s, ce qui contredit l'hypothèse sur s.

   > **Conclusion :** tout sommet de degré sortant maximal est un roi ; donc tout tournoi possède au moins un roi.

> **✓ Rigueur !**
> On dit "un", car il peut y en avoir plusieurs.
> Au passage, il existe bien au moins un sommet de degré sortant maximal, car le graphe est d'ordre fini...

> ### Sur les questions d'existence...
> Je reprends ce que disait mon prof de spé quand j'étais en prépa : "Les questions d'existence, c'est dur."
> Bien souvent, une question d'existence peut être traitée par au moins une des trois méthodes suivantes :
> 1. la détermination "de tête" d'une solution,
> 2. la construction d'une solution au problème,
> 3. l'utilisation d'un théorème affirmant une existence, comme :
>   - le théorème des valeurs intermédiaires,
>   - le théorème des bornes,
>   - le théorème fondamental de l'analyse, affirmant que toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives,
>   - le théorème d'existence d'une chaîne eulérienne / d'un cycle eulérien,
>   - le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas d'un problème de Cauchy,
>   - ...

> **♣ Méthode !**
> Alors que pour les questions d'unicité, on a souvent des pistes...

> **☞ Pour info...**
> Même si certains de ces théorèmes ont des démonstrations construisant une solution (comme la méthode de dichotomie qui construit une solution à une équation du type $f(x) = 0$ et qui démontre donc le TVI).

4. 4.a. Que permet de faire la fonction `mystere` suivante, où `L` désigne une liste de réels ?

```python
def mystere(L):
    m,k=L[0],0
    for i in range(1,len(L)):
        if L[i]>m:
            m=L[i]
            k=i
    return k
```

   Ce programme permet de renvoyer le rang du premier maximum de la liste `L`.

   4.b. Proposer une fonction **Python** prenant en argument d'entrée la matrice d'adjacence d'un tournoi dont les sommets sont numérotés à partir de 0 et renvoyant en sortie un roi.
   On cherche donc à renvoyer une ligne dont la somme des coefficients est maximale... on utilise pour cela la fonction `mystere`. Voici un programme qui convient :

> **★ Classique ! ★**
> A savoir écrire ! C'est un grand classique sur les listes...

```python
import numpy as np

def roi(M):
    L=[] #liste des sommes des lignes
    (n,p)=np.shape(M)
    for i in range(0,n):
        L.append(sum(M[i,:]))
    return mystere(L)
```