Préparation aux oraux - Oral 3

Jeudi 16 mai 2024

Exercice avec préparation

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout réel m, on considère la fonction

$$f_m : x \longmapsto \frac{e^{-x+m}}{\left(1+e^{-x+m}\right)^2}$$

1. Question de cours. Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
2. Montrer que f_0 est paire et tracer sa courbe représentative.
   Comment en déduire la courbe représentative de f_m, pour m réel ?
3. Vérifier que f_m est une densité de probabilité.
4. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note X_m une variable aléatoire de densité f_m.
   - 4.a. Soit $m \in \mathbb{R}$. Quelle est la fonction de répartition de X_m ?
   - 4.b. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?
5. Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que X_m admet une espérance et donner sa valeur.
6. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $Y_m = \ln(1+e^{X_m})$.
   - 6.a. Déterminer la loi de Y_0.
   - 6.b. En déduire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de X_0.
   - 6.c. La suite $(Y_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?

Exercice sans préparation

On appelle **tournoi** un graphe orienté simple tel qu'entre deux sommets distincts, il existe un et un seul arc.
On dit qu'un sommet est un roi lorsqu'il a un chemin orienté de longueur au plus 2 vers tous les autres sommets.

1. Combien un tournoi contient-il d'arcs ?
2. Donner un tournoi d'ordre 4 possédant un unique roi.
3. Montrer que, dans un tournoi, il existe toujours un roi.
4. 4.a. Que permet de faire la fonction **mystere** suivante, où **L** désigne une liste de réels ?

```python
def mystere(L):
    m,k=L[0],0
    for i in range(1,len(L)):
        if L[i]>m:
            m=L[i]
            k=i
    return k
```

   4.b. Proposer une fonction **Python** prenant en argument d'entrée la matrice d'adjacence d'un tournoi dont les sommets sont numérotés à partir de 0 et renvoyant en sortie un roi.