Préparation aux oraux - Oral 1

Mercredi 15 mai 2024

Exercice avec préparation - HEC 2017 E

> **♡ L'avis du chef ! ♡**
> Très bon exercice de probabilités sur un grand classique : le problème du collectionneur. On pourra par exemple retravailler **EML 2024 - Exercice 3**...

1. **Question de cours.** Définition et propriétés de la loi géométrique.
   Voir cours.

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

   2.a. Écrire une fonction **Python** simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire Y.
   On propose deux solutions qui conviennent :

```python
1  import numpy.random as rd
2  
3  def simulY():
4      boule=rd.randint(1,4)
5      tirage=rd.randint(1,4)
6      Y=2
7      while tirage==boule:
8          boule=tirage
9          tirage=rd.randint(1,4)
10         Y=Y+1
11     return Y
12 
13 def simulYbis():
14     L=[] #liste des numéros obtenus
15     L.append(rd.randint(1,4))
16     Y=1
17     while len(L)<2:
18         tirage=rd.randint(1,4)
19         Y=Y+1
20         if tirage not in L:
21             L.append(tirage)
22     return Y
```

> **Petite remarque**
> Si l'on cherche à simuler la loi de Z (introduite en question 3), il suffit d'écrire `while len(L)<3:` en ligne 17.

   2.b. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y-1$.
   Remarquons déjà que $Y(\Omega) \subset [\![2;+\infty[\![$.
   Ainsi :

$$(Y-1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

> **Petite remarque**
> Une inclusion suffit pour le raisonnement, inutile de s'embêter avec une égalité.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$[Y-1=k]$ est réalisé	si, et seulement si,	$[Y=k+1]$ est réalisé
	si, et seulement si,	$k+1$ tirages sont nécessaires à l'obtention de deux boules différentes
	si, et seulement si,	n'importe quelle boule est tirée au premier tirage, puis les tirages 2 à k donnent la même boule que le tirage précédent et le $(k+1)$-ième tirage donne une boule différente

> **✍ Rédaction**
> Nous pourrions définir des évènements, et il serait d'ailleurs préférable (pas indispensable non-plus) de le faire à l'écrit. Pour un oral, on peut bien évidemment se contenter de ce qui est rédigé ici.

   Puisque les tirages s'effectuent avec remise, par indépendance des évènements en jeu, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left([Y-1=k]\right) &= 1 \times \left(\prod_{i=2}^{k} \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3} \end{aligned}$$

   Conclusion : la variable aléatoire $Y-1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

2.c. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y.

De la question précédente on déduit que Y admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{3}{4}$$

Ainsi, puisque Y est transformée affine de $Y-1$ ($Y = Y - 1 + 1$), Y admet également une espérance et une variance...

Conclusion : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{3}{4}$.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

3.a. Soient deux entiers $k \geq 2$ et $n \geq 3$.
Calculer $\mathbb{P}\big([Y=k] \cap [Z=n]\big)$ selon les valeurs de k et n.

- Si $n \leq k$:
  Dans ce cas, $[Y=k] \cap [Z=n] = \varnothing$ et ainsi : $\mathbb{P}\big([Y=k] \cap [Z=n]\big) = 0$.
- Si $n \geq k+1$:

$[Y=k] \cap [Z=n]$ est réalisé	si, et seulement si,	k tirages sont nécessaires à l'obtention de deux boules différentes et n tirages sont nécessaires à l'obtention des trois boules différentes
	si, et seulement si,	n'importe quelle boule est tirée au premier tirage, puis les tirages 2 à $k-1$ donnent la même boule, le tirage k donne une boule différente ; et ensuite, les tirages $k+1$ à $n-1$ (aucun si $n = k+1$) donnent une des deux boules déjà tirées et enfin la dernière boule non tirée au tirage n

Puisque les tirages s'effectuent avec remise, par indépendance des évènements en jeu, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=k] \cap [Z=n]\big) &= 1 \times \left(\prod_{i=2}^{k-1} \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} \times \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} \frac{1}{3} \\
&= \frac{2^{n-k}}{3^{n-1}}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y=k] \cap [Z=n]\big) = \begin{cases} \dfrac{2^{n-k}}{3^{n-1}} & \text{si } n \geq k+1 \\ 0 & \text{si } n \leq k \end{cases}$.

3.b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, on a $\mathbb{P}([Z=n]) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^{n-2}-1}{3^{n-2}}\right)$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Y=k]\big)_{k \in [\![2;+\infty[\![}$ comme système complet d'évènements, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [Z=n]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z=n]\big) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [Z=n]\big) && \text{d'après la question précédente : } \forall k \geq n,\ \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [Z=n]\big) = 0 \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [Z=n]\big) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2^{n-k}}{3^{n-1}} \\
&= \frac{2^n}{3^{n-1}} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k && \frac{1}{2} \neq 1 \\
&= \frac{2^n}{3^{n-1}} \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{2^n}{3^{n-1}} \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{2} \\
&= \frac{2^n - 2^2}{2 \times 3^{n-1}} \\
&= \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2^{n-2}-1}{3^{n-2}}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier $n \geq 3$, on a $\mathbb{P}([Z=n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{2^{n-2}-1}{3^{n-2}}\right)$.

Petite remarque
L'inclusion réciproque, non nécessaire pour poursuivre, est vraie, car :
$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ [Z=n] \neq \varnothing$.

3.c. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

- Remarquons déjà que, par définition de Z, on a $Z(\Omega) \subset [\![3;+\infty[\![$.
- On sait que :

Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in Z(\Omega)} n\mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 3} n\mathbb{P}([Z=n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} n\mathbb{P}([Z=n]) &= \sum_{n=3}^{N} n\frac{2}{3}\left(\frac{2^{n-2}-1}{3^{n-2}}\right)\\
&= \sum_{n=3}^{N} (n-2+2)\frac{2}{3}\left(\frac{2^{n-2}-1}{3^{n-2}}\right)\\
&= \sum_{n=3}^{N} (n-2)\frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right) + 2\sum_{n=3}^{N}\frac{2}{3}\left(\frac{2^{n-2}-1}{3^{n-2}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N-2} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N-2} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) + 2\sum_{n=3}^{N}\mathbb{P}([Z=n])
\end{aligned}$$

changement d'indice $k=n-2$ dans la première somme, linéarité de la somme

Or $\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \in]-1;1[$, donc $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ sont convergentes convergentes, comme troncatures de séries géométriques convergentes. La série $\sum_{n\geq 3}\mathbb{P}([Z=n])$ est également convergente... Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 3} n\mathbb{P}([Z=n])$ est convergente.

- On en déduit que Z admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n\mathbb{P}([Z=n])\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) + 2\sum_{n=3}^{+\infty}\mathbb{P}([Z=n])\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}\right) + 2\\
&= \frac{2}{3}\left(6-\frac{3}{4}\right)+2\\
&= \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

$Z(\Omega) \subset [\![3;+\infty[\![$, donc $\sum_{n=3}^{+\infty}\mathbb{P}([Z=n]) = 1$

Conclusion : Z admet une espérance et $\mathbb{E}(Z) = \frac{11}{2}$.

Petite remarque
Calcul un peu pénible... On peut peut-être gagner une ou deux lignes en s'y prenant autrement, à voir.

4. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

On a, d'après les questions 2.b, 3.a et 3.b :

$$\mathbb{P}([Y=3]\cap[Z=3]) = 0 \quad ; \quad \mathbb{P}([Y=3]) = \frac{2}{9} \quad ; \quad \mathbb{P}([Z=3]) = \frac{2}{9}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([Y=3]\cap[Z=3]) \neq \mathbb{P}([Y=3])\mathbb{P}([Z=3])$$

Conclusion : les variables aléatoires Y et Z ne sont pas indépendantes.

5. D'une manière générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons numérotés de 1 à n.

★ Classique ! ★
On est ici dans le cadre général du problème dit "du collectionneur", un grand classique !

Soit n le nombre de boules dans l'urne. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note $T_{i,n}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de i numéros différents. On cherche donc l'espérance de $T_{n,n}$...
De la sorte, on a : $T_{1,n}$ qui est constante égale à 1.
Pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, notons $\Delta_{i,n} = T_{i,n} - T_{i-1,n}$. Ainsi :

- Soit $i \in [\![2;n]\!]$. $\Delta_{i,n}$ est égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le i-ème numéro différent après en avoir obtenu $(i-1)$ différents...

  Par conséquent, $\Delta_{i,n}$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-(i-1)}{n}$.
- Et :

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} \Delta_{i,n} &= \sum_{i=2}^{n} (T_{i,n} - T_{i-1,n}) && \text{télescopage}\\ &= T_{n,n} - T_{1,n}\\ &= T_{n,n} - 1\end{aligned}$$

D'où :

$$T_{n,n} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \Delta_{i,n}$$

Puisque les variables aléatoires $\Delta_{2,n}, \dots, \Delta_{n,n}$ admettent toutes une espérance, la variable aléatoire T_n également et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n,n}) &= \mathbb{E}\left(1 + \sum_{i=2}^{n} \Delta_{i,n}\right) && \text{linéarité de l'espérance}\\ &= 1 + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(T i, n) && \forall i \in [\![2;n]\!],\ \Delta_{i,n} \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)\\ &= 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{n}{n-i+1}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} && \text{changement d'indice } k = n-i+1\\ &= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

Conclusion : $T_{n,n}$ admet une espérance et $\mathbb{E}(T_{n,n}) = n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Pourquoi ?
En partant du tirage suivant celui ayant permis l'apparition du $(i-1)$-ème numéro différent, l'expérience consiste en la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirage avec remise) dont le succès "obtenir un i-ème numéro différent" est de probabilité $\dfrac{n-(i-1)}{n}$ (par équiprobabilité, puisque $n-(i-1)$ numéros ont déjà été obtenus, et que l'on en veut un autre...).

Petite remarque
De la sorte, $T_{3,3} = Z$, mais attention, $Y \neq T_{2,2}$, en revanche $Y = T_{2,3}$...
On vérifie donc la cohérence du résultat trouvé avec celui obtenu en question 3.c.

Exercice sans préparation – Fait maison

♡ L'avis du chef ! ♡
Très bon exercice, sur un grand classique. Équation fonctionnelle, équation différentielle, analyse-synthèse, absurde... On aime !

L'objectif est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (1)$$

1. Justifier que (1) possède une infinité de solutions.
   La fonction nulle est solution de (1)... Toutes les fonctions $x \longmapsto e^{ax}$, avec $a \in \mathbb{R}$ sont également solution.

   Conclusion : l'équation (1) possède une infinité de solutions.

2. Soit f une fonction non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (1).

   2.a. Déterminer $f(0)$.
   En évaluant (1) avec $x = y = 0$, on a :
   $$f(0) = f(0)^2$$
   D'où : $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   Montrons que $f(0) \neq 0$; et pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons $f(0) = 0$.
   En évaluant (1) avec $y = 0$, on obtient :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x) \times f(0) = 0$$
   Or f n'est pas nulle. D'où l'absurdité !

   Conclusion : $f(0) = 1$.

   2.b. Démontrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Conclure.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. En dérivant la relation (1) par rapport à la variable y, on obtient :
   $$\forall y \in \mathbb{R},\ f'(x+y) = f(x)f'(y)$$
   En évaluant cette relation avec $y = 0$, on obtient :
   $$f'(x) = f'(0)f(x)$$

Conclusion : f vérifie l'équation différentielle $g' = g'(0)g$, avec g dérivable sur $\mathbb{R}$.

- En notant $a = f'(0)$, d'après la question précédente et le point précédent, la fonction f est solution du problème de Cauchy suivant
$$\left\{ \begin{array}{l} f' = af \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$
dont l'unique solution est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$.
Par conséquent :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{ax}$$
et cette relation n'impose aucune condition sur la valeur de a...

Conclusion : $\exists a \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

- De ce qui précède, on a démontré :
$$\big(f \text{ est non nulle, dérivable et vérifie (1)}\big) \Longrightarrow \exists a \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{ax}$$
La réciproque se vérifie immédiatement...

Conclusion : l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1) est $\{x \longmapsto 0\} \cup \{x \longmapsto \mathrm{e}^{ax},\ a \in \mathbb{R}\}$.