# Préparation aux oraux - Oral 1

Mercredi 15 mai 2024

## Exercice avec préparation

1. **Question de cours.** Définition et propriétés de la loi géométrique.

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.
   - 2.a. Écrire une fonction **Python** simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire $Y$.
   - 2.b. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y - 1$.
   - 2.c. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire $Y$.
3. On note $Z$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.
   - 3.a. Soient deux entiers $k \geq 2$ et $n \geq 3$.
     Calculer $\mathbb{P}\big([Y = k] \cap [Z = n]\big)$ selon les valeurs de $k$ et $n$.
   - 3.b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, on a $\mathbb{P}([Z = n]) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^{n-2} - 1}{3^{n-2}}\right)$.
   - 3.c. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
4. Les variables aléatoires $Y$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?
5. D'une manière générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ $n$ jetons numérotés de 1 à $n$.

## Exercice sans préparation

L'objectif est de déterminer toutes les fonctions $f$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x + y) = f(x)f(y) \qquad (1)$$

1. Justifier que (1) possède une infinité de solutions.
2. Soit $f$ une fonction non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (1).
   - 2.a. Déterminer $f(0)$.
   - 2.b. Démontrer que $f$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Conclure.