Préparation aux oraux - Oral 1

Lundi 13 mai 2024

Exercice avec préparation - Fait maison

♡ L'avis du chef ! ♡
Très bon exercice sur les séries avec la mise en place, dans un cas particulier, du théorème spécial sur les séries alternées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$.

1. Question de cours. Convergence absolue d'une série, lien avec la convergence.
   Voir cours.
2. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   On sait que :
   - ✓ $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$,
   - ✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$.

   Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$.
3. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n|$?
   On a :
   - ✓ d'après la question précédente : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$; ainsi : $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$,
   - ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \geq 0,\ \frac{1}{2n} \geq 0$,
   - ✓ la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ également.

   ☞ Rappel...
   Le critère nous dit que si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes positifs, alors les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ ont même nature.

   Conclusion : par critère d'équivalence sur les séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n|$ est divergente.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}$.

   ☞ Pour info...
   Les questions 4.a, 4.b et 4.c peuvent être traitées dans un cas général pour démontrer le "théorème spécial sur les séries alternées" : voir ECG1A - Chapitre 14 - Exercice 19

   4.a. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont même limite.
   Pour cela, démontrons que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

   $$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+4} + \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+2} \\ &= \frac{1}{4n+4} - \frac{1}{4n+2} \\ &= \frac{-2}{(4n+2)(4n+4)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

   Par conséquent : la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

   $$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{4n+6} + \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+4} \\ &= \frac{-1}{4n+6} + \frac{1}{4n+4} \\ &= \frac{2}{(4n+4)(4n+6)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

   Par conséquent : la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+2} \\ &= \frac{-1}{4n+2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$$

Conclusion : les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, et donc convergent et ont même limite.

4.b. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. On note S sa somme.

D'après la question précédente, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont même limite. Ainsi, par théorème de recouvrement, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers cette même limite).

Conclusion : autrement dit, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente.

✘ Attention !
On ne peut pas conclure, à partir des questions 2 et 4.b, sur la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ car le critère d'équivalence ne fonctionne que sur les séries à terme général de signe constant.

4.c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

puis en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |S_n - S| \leq \frac{1}{2n+2}$$

- ⋆ On sait que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers S, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{2n} \geq S$$

  ⋆ On sait que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers S, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{2n+1} \leq S$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

➠Réflexe !
Il est très fréquent de procéder ainsi pour majorer une valeur absolue...
$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}$:
$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$|S_n - S| \leq \frac{1}{2n+2} \iff -\frac{1}{2n+2} \leq S_n - S \leq \frac{1}{2n+2}$$

Distinguons deux cas :

⋆ Si n est pair.
Il existe alors un entier naturel k, que nous considérons ensuite, tel que $n = 2k$. Montrons ainsi :

$$\frac{-1}{4k+2} \leq S_{2k} - S \leq \frac{1}{4k+2}$$

◇ D'après ce qui précède :

$$S_{2k} - S \geq 0$$

Et ainsi, par transitivité, puisque $\frac{-1}{4k+2} \leq 0$, on a :

$$S_{2k} - S \geq \frac{-1}{4k+2}$$

◇ Également d'après ce qui précède $S_{2k+1} \leq S$, donc $-S_{2k+1} \geq -S$ et ainsi :

$$S_{2k} - S_{2k+1} \geq S_{2k} - S$$

Autrement dit :

$$-\frac{(-1)^{2k+1}}{4k+2} \geq S_{2k} - S$$

Puis :

$$S_{2k} - S \leq \frac{1}{4k+2}$$

On a donc
$$\frac{-1}{4k+2} \leq S_{2k} - S \leq \frac{1}{4k+2}$$
Autrement dit, puisque $n = 2k$:
$$\frac{-1}{2n+2} \leq S_n - S \leq \frac{1}{2n+2}$$

⋆ Si n est impair.
Il existe alors un entier naturel k, que nous considérons ensuite, tel que $n = 2k+1$. Montrons ainsi :
$$\frac{-1}{4k+4} \leq S_{2k+1} - S \leq \frac{1}{4k+4}$$

◇ D'après ce qui précède :
$$S_{2k+1} - S \leq 0$$
Et ainsi, par transitivité, puisque $\dfrac{1}{4k+4} \geq 0$, on a :
$$S_{2k+1} - S \leq \frac{1}{4k+4}$$

◇ Également d'après ce qui précède $S_{2k+2} = S_{2(k+1)} \geq S$, donc $-S_{2k+2} \leq -S$ et ainsi :
$$S_{2k+1} - S_{2k+2} \leq S_{2k+1} - S$$
Autrement dit :
$$-\frac{(-1)^{2k+2}}{4k+4} \leq S_{2k+1} - S$$
Puis :
$$-\frac{1}{4k+4} \leq S_{2k+1} - S$$

On a donc
$$\frac{-1}{4k+4} \leq S_{2k+1} - S \leq \frac{1}{4k+4}$$
Autrement dit, puisque $n = 2k+1$:
$$\frac{-1}{2n+2} \leq S_n - S \leq \frac{1}{2n+2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |S_n - S| \leq \dfrac{1}{2n+2}$.

Petite remarque
De loin la question la plus technique de l'exercice. Il ne faut pas se perdre dans les indices...
On pourrait d'ailleurs simplifier un peu

4.d. Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir une valeur approchée de S à 10^{-3} près.
D'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |S_n - S| \leq \frac{1}{2n+2}$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{2n+2} \leq 10^{-3}$, on a par transitivité :
$$|S_n - S| \leq 10^{-3}$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+2} \leq 10^{-3} &\iff 2n+2 \geq 10^3 \\ &\iff 2n \geq 998 \\ &\iff n \geq 499 \end{aligned}$$
Par conséquent S_{499} est proche de S à 10^{-3} près... il suffit donc, pour répondre à la question, de proposer un programme calculant S_{499} :

```
S=0
for k in range(1,500):
    S=S+(-1)**k/(2*k)
print(S)
```

Petite remarque
On pourrait également proposer un programme qui débute par la recherche du plus petit entier naturel n tel que $\dfrac{1}{2n+2} \leq 10^{-3}$...

☞ Pour info...
On connaît la valeur de S...
En effet, d'après QC33, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$... donc $S = \dfrac{-\ln(2)}{2}$.
L'énoncé aurait d'ailleurs pu varier les plaisirs en faisant établir la convergence (et le calcul de S dans la foulée) comme en QC33 dans le cas général ou dans le cas particulier $x = -1$.

5. Donner le réel a tel que :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{a}{n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On sait que :

✓ $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$,

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n} = 0$.

D'où :

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right) &= \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{2n}\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{(-1)^n}{2n}\right)^2\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $a = -\dfrac{1}{8}$ et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} - \dfrac{1}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

6. Conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n}$, $w_n = \dfrac{-1}{8n^2}$ et $x_n = u_n - v_n - w_n$ de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = v_n + w_n + x_n$$

On a ainsi :

- d'après la question **4.b**, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est convergente ;
- la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ est convergente ;
- d'après la question précédente :

$$x_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où, on a :

✓ $|x_n| = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x_n| \geq 0,\ \dfrac{1}{n^2} \geq 0$,

✓ la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann divergente.

Ainsi, par critère de négligeabilité sur les séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ est convergente.

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ est également convergente.

La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est finalement la somme de trois séries convergentes...

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Exercice sans préparation – HEC 2021 B/L

♡ L'avis du chef ! ♡
Très bon exercice mêlant variables aléatoires discrètes et à densité. Complet !

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $]0;1[$. On pose :

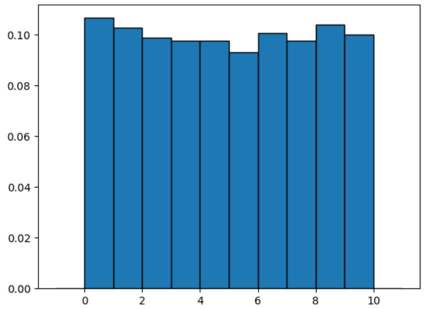
$$D_1 = \lfloor 10X \rfloor \quad ; \quad D_2 = \lfloor 100X - 10D_1 \rfloor$$

On admet que D_1 et D_2 ainsi définies sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. L'exécution du programme suivant renvoie le graphique ci-dessous. Que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture et déterminer la loi de D_2.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

L=np.floor(10*rd.random(10000))
plt.hist(L,range(-1,12),density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```



- Le programme permet d'obtenir un histogramme de fréquences sur 10000 réalisations indépendantes de la variable aléatoire D_1. On conjecture donc que D_1 suit une loi uniforme.
  Puisque $X(\Omega) =]0;1[$, on a $(10X)(\Omega) =]0;10[$ et donc $D_1(\Omega) = [\![0;9]\!]$.

> **Conclusion :** on conjecture que D_1 suit la loi uniforme sur $[\![0;9]\!]$.

- On a déjà justifié que $D_1(\Omega) = [\![0;9]\!]$.
  Soit $n \in [\![0;9]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([D_1 = n]\big) &= \mathbb{P}\big([\lfloor 10x \rfloor = n]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([n \leq 10x < n+1]\big) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{10} \leq X < \frac{n+1}{10}\right]\right) \quad \text{X suit la loi uniforme sur $]0;1[$} \\
&= \int_{\frac{n}{10}}^{\frac{n+1}{10}} 1\, dt \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

☞ Rappel...
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}$:
$\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k+1$

> **Conclusion :** $D_1(\Omega) = [\![0;9]\!]$ et $\forall n \in [\![0;9]\!], \mathbb{P}\big([D_1 = n]\big) = \dfrac{1}{10}$; donc D_1 suit la loi uniforme sur $[\![0;9]\!]$.

- ⋆ Soit $\omega \in \Omega$. Puisque $D_1 = \lfloor 10X \rfloor$, on a $D_1(\omega) \leq (10X)(\omega) < D_1(\omega) + 1$. D'où :

$$0 \leq 100X(\omega) - 10D_1(\omega) < 10$$

  Et ainsi :

$$D_2(\omega) \in [\![0;9]\!]$$

  d'où :

$$D_2(\Omega) \subset [\![0;9]\!]$$

  ⋆ Soit $n \in [\![0;9]\!]$.
  D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([D_1 = k]\big)_{k \in [\![0;9]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([D_2 = n]\big) &= \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}\big([D_1 = k] \cap [D_2 = n]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}\big([D_1 = k] \cap [\lfloor 100X - 10k \rfloor = n]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}\big([D_1 = k] \cap [n \leq 100X - 10k < n+1]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}\left([D_1 = k] \cap \left[\frac{10k+n}{10} \leq 10X < \frac{10k+n+1}{10}\right]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}\left([D_1 = k] \cap \left[k + \frac{n}{10} \leq 10X < k + \frac{n+1}{10}\right]\right) \quad n \in [\![0;9]\!] \text{, donc } \frac{n}{10} \geq 0 \text{ et } \frac{n+1}{10} \leq 1 \text{, d'où : } \left[k + \frac{n}{10} \leq 10X < k + \frac{n+1}{10}\right] \subset [k \leq 10X < k+1] = [D_1 = k] \\
&= \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}\left(\left[k + \frac{n}{10} \leq 10X < k + \frac{n+1}{10}\right]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}\left(\left[\frac{10k+n}{100} \leq X < \frac{10k+n}{100} + \frac{1}{100}\right]\right) \quad \text{X suit la loi uniforme sur $]0;1[$} \\
&= \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{100} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Conclusion : $D_2(\Omega) \subset [\![0;9]\!]$ et $\forall n \in [\![0;9]\!], \mathbb{P}\big([D_2 = n]\big) = \dfrac{1}{10}$; donc D_2 suit la loi uniforme sur $[\![0;9]\!]$.

Petite remarque

On pourrait justifier l'inclusion $[\![0;9]\!] \subset D_2(\Omega)$ en disant que pour tout $n \in [\![0;9]\!]$, $\mathbb{P}\big([D_2 = n]\big) \neq 0$, donc $[D_2 = n] \neq \varnothing$...

2. Les variables aléatoires D_1 et D_2 sont-elles indépendantes ?
Soit $(k,n) \in [\![0;9]\!]^2$. En reprenant le calcul mené dans la somme à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([D_1 = k] \cap [D_2 = n]\big) &= \frac{1}{100} \\ &= \mathbb{P}\big([D_1 = k]\big) \times \mathbb{P}\big([D_2 = n]\big)\end{aligned}$$

D_1 et D_2 suivent la loi uniforme sur $[\![0;9]\!]$

Conclusion : les variables aléatoires D_1 et D_2 sont indépendantes.

Piège !

Malgré la forme interrogative, la réponse est affirmative...