Préparation aux oraux - Oral 1

Lundi 13 mai 2024

Exercice avec préparation

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$.

1. Question de cours. Convergence absolue d'une série, lien avec la convergence.
2. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n|$?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}$.

   4.a. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont même limite.

   4.b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. On note S sa somme.

   4.c. Établir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$
   puis en déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n - S| \leq \frac{1}{2n+2}$$

   4.d. Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir une valeur approchée de S à 10^{-3} près.
5. Donner le réel a tel que :
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{a}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
6. Conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $]0;1[$. On pose :

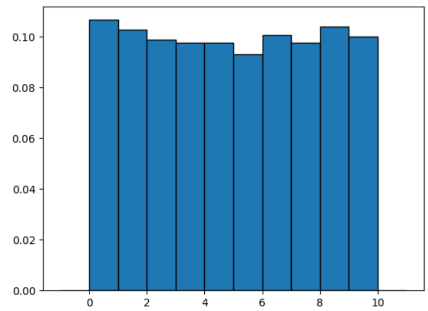
$$D_1 = \lfloor 10X \rfloor \quad ; \quad D_2 = \lfloor 100X - 10D_1 \rfloor$$

On admet que D_1 et D_2 ainsi définies sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. L'exécution du programme suivant renvoie le graphique ci-dessous. Que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture et déterminer la loi de D_2.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

L=np.floor(10*rd.random(10000))
plt.hist(L,range(-1,12),density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```



2. Les variables aléatoires D_1 et D_2 sont-elles indépendantes ?