Exercice 1

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx$ et on a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx$.

1. 1.a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0;1],\ \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

   1.b. En déduire que $u_0 = \dfrac{1}{4}\ln(3)$.

2. Calculer u_1.

3. 3.a. Pour tout entier naturel n, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

   3.b. Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin quelle renvoie la valeur de u_n à l'appel de **suite(n)**.

```python
def suite(n):
    if (-1)**n==1:
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2,n+1,2):
            u=4*u - ...
    else:
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3,n+1,2):
            u=4*u - ...
    return u
```

4. 4.a. Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}$$

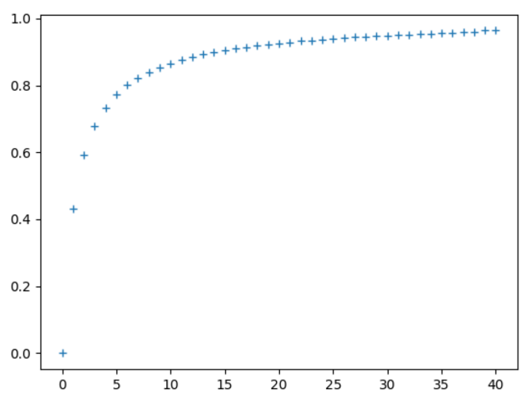
   4.b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   4.c. La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. 5.a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```python
x=np.arange(0,41)
u=[] #liste vide
for n in range(41):
    u.append(3*n*suite(n))
plt.plot(x,u, '+')
plt.show()
```

   Ce script renvoie le graphique suivant :



   Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

$$❶\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n \quad ; \quad ❷ \lim_{n\to+\infty} u_n = 1\ ;\ ❸\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}\ ;\ ❹\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

5.b. Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx$$

5.c. Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx = 0$$

5.d. Vérifier la conjecture établie à la question 5.a.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.a. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

1.b. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1.c. En déduire, par des considérations de parité, que X a une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. On note F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geqslant 0$.

3. Simulation.

3.a. On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$ et montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3.b. Utiliser la question 3.a pour écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX()` qui renvoie une simulation de X.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

4.a. Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4.b. Etudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4.c. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|Y_n| > \varepsilon]\big) = 0$$

5. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

5.a. Exprimer, pour tout réel x, $\mathbb{P}\big([M_n > x]\big)$ à l'aide de la fonction F_X, puis en déduire que M_n suit la même loi que la variable aléatoire Y_n présentée à la question 4.

5.b. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie une simulation de M_n à l'appel de `simulM(n)`.

```python
def simulM(n):
    X=np.array([...... for k in range(n)])
    M=......
    return M
```

Exercice 3

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt \tag{1}$$

1. Montrer que l'égalité (1) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \tag{2}$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

2.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^x f(u)du$$

2.b. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$$

2.c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

2.d. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2.d est la seule solution du problème posé en début d'exercice.
4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x t f(x-t)dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

Exercice 4

Dans ce problème on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.
On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)$-ième épreuve.
On pose : $a_n = \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big),\ b_n = \mathbb{P}\big([X_n = 1]\big),\ c_n = \mathbb{P}\big([X_n = 2]\big)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

1. **1.a.** Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

   1.b. Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.

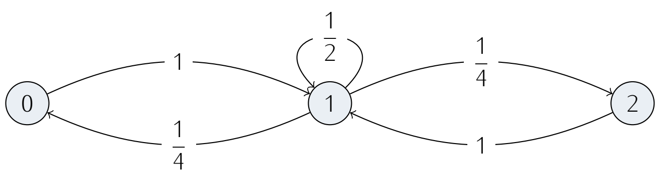
   1.c. Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\big([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\big)$ est un système complet d'évènements.

   1.d. En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.

   2.a. Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{[X_n=i]}\big([X_{n+1} = j]\big)$, pour tout $(i, j) \in [\![0; 2]\!]^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



   2.b. Écrire la matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0;2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=i]}\big([X_{n+1} = j]\big)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifier avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.

   2.c. Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2.c restent valables pour $n = 0$.
4. **4.a.** Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.

   4.b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$.

   4.c. Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2c_n = 1$$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   5.a. Montrer que la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

   5.b. Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.
7. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

8.a. Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

8.b. En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

8.c. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

8.d. On pose $D = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis conclure que M est diagonalisable.

8.e. Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n M$$

8.f. En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n$$

8.g. Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★