Exercice 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A. Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ x'(t) = -x(t) + \mathrm{e}^{-t}$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$.
   1.b. Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \longmapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   1.c. Résoudre l'équation différentielle (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccc} x'(t) & = & -x(t) & + & y(t) \\ y'(t) & = & & - & y(t) \end{array}\right.$$

2. 2.a. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

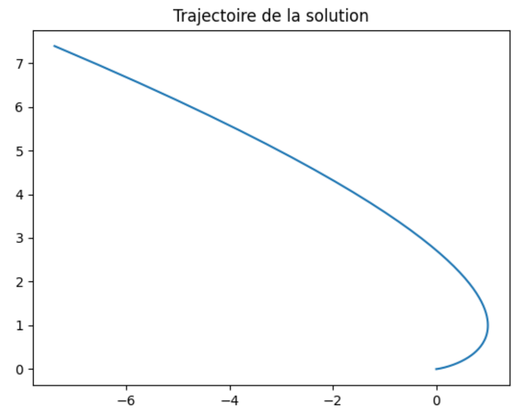
$$(S) \iff X'(t) = AX(t) \ \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

   La matrice A est-elle diagonalisable ?
   2.b. Justifier l'existence d'une unique solution (x,y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.
   2.c. Déterminer cette solution (x,y) en vous aidant de la question 1.
   2.d. Étudier la convergence de la solution (x,y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Recopier et compléter le programme en langage **Python** ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \longmapsto \big(x(t), y(t)\big)$ pour $t \in [-2;10]$.
   On rappelle que la commande **np.linspace(-2,10,200)** crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=np.linspace(-2,10,200)
x=[... for t in T]
y=[... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(...)
plt.show()
```



Partie B. Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. 4.a. Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
   4.b. Dresser le tableau de variations de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et 0.
5. 5.a. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.
   5.b. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

Partie C. Étude d'une suite implicite

6. 6.a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k.

   6.b. Déterminer explicitement u_1.

7. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :
$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$$
   En déduire que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

8. 8.a. Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que :
$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$$
   8.b. En déduire que $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

9. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{k \geq 1} u_k$?

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :
$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On note $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :
$$\mathscr{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$$

Partie A. Étude de A et de $\mathscr{C}$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. La matrice A est-il diagonalisable ?
3. Justifier que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. 4.a. Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   4.b. Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathscr{C}$.
5. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathscr{C}$.

   5.a. Montrer que le produit MN appartient à $\mathscr{C}$.

   5.b. Montrer que M et N commutent, c'est-à-dire que $MN = NM$.
6. Soit M une matrice non nulle de $\mathscr{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathscr{C}$.

Partie B. Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathscr{C}$

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :
$$P(x) = x^2 + ux + v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$
On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant.
Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{C}$ telle que $P(M) = 0_2$.

7. Soit $M = aI_2 + bA$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

   7.a. Montrer : $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.

   7.b. En déduire :
$$P(M) = 0_2 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2ab + ub & = & 0 \end{array} \right.$$
8. Dans cette question, on montre que le système ci-dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en distinguant deux cas :

   8.a. Si $\Delta \geq 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.

   8.b. Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme (a, b) avec $b \neq 0$.
9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

Partie C. Un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ \varphi(M) = AMA$$

On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
11. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que l'endomorphisme φ est bijectif, et donner φ^{-1}.
12. 12.a. Calculer $\varphi(E_1)$, ..., $\varphi(E_4)$, puis donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
    12.b. Justifier sans calcul que B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1; 1\}$.
    (On pourra remarquer que $B^2 = I_4$, où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.)
    12.c. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de B.

Exercice 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier $i \in [\![1; N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i - 1$ numéros distincts lors des $k - 1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A. Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.
2. Le programme en langage **Python** ci-dessous définit une fonction **ajout** qui prend en argument une liste **L** et un entier **x**.

```python
def ajout(L,x):
    if (x in L)==False:
        L.append(x)
```

   Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande **ajout(L,x)** modifie la liste **L**.
3. Recopier et compléter la fonction **Python Simul_T** ci-dessous.
   Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1; N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :
   - **L** la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
   - **k** le rang du tirage en cours ;
   - **x** le résultat du tirage en cours.

```python
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L=[]
    k=0
    while ...:
        x=rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k=...
    return (...)
```

4. On suppose $N = 3$.
   Rédiger un programme **Python** qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de **Simul_T(3,2)**.
   Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B. Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
6. Soit $k \geq 2$ un entier fixé.
   - 6.a. Décrire l'évènement $[T_2 = k] \cap [X_1 = 1]$ à l'aide des évènements $[X_j = 1]$ et $[X_j \neq 1]$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.
   - 6.b. En déduire $\mathbb{P}\big([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]\big)$.
   - 6.c. Montrer que $\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
   Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C. Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.

Pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1}-ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i-1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variable aléatoires $Z_1, \dots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2; N]\!]$.
   - 9.a. Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-i+1}{N}$.
   - 9.b. Exprimer $\mathbb{E}(Z_i)$ et $\mathbb{V}(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
10. Soit $i \in [\![1; N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \dots, Z_i$.

Loi de T_3

11. 11.a. Calculer $\mathbb{P}\big([Z_2 = \ell] \cap [Z_3 = k]\big)$ pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$.
    - 11.b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}\big([Z_2 + Z_3 = n]\big) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n} \right)$$

    - 11.c. Déterminer la loi de T_3.

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1; N]\!]$, montrer que $\mathbb{E}(T_i) = N \displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$.
13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq j \leq N$, montrer que

$$\mathrm{Cov}(T_i, T_j) = \mathbb{V}(T_i)$$

où $\mathrm{Cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★