Exercice 1

♡ L'avis du chef ! ♡
Exercice un peu décousu, mais assez complet tout de même. La partie A est particulièrement détaillée et proche du cours…

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A. Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \;:\; x'(t) = -x(t) + \mathrm{e}^{-t}$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. **1.a.** Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation $x' = -x$, d'inconnue x une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle linaire d'ordre 1, homogène.

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de $x' = -x$ est $\{t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1.b. Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \longmapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $x_0 : t \longmapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$.

- x_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x_0'(t) = (a - at - b)\mathrm{e}^{-t}$$

- Puis, on a :

$$\begin{aligned}
\big(x_0 \text{ est solution de } (E)\big) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ x_0'(t) = -x_0(t) + \mathrm{e}^{-t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ (a - at - b)\mathrm{e}^{-t} = -(at+b)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \\
&\iff a = 1
\end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-t} \neq 0$

> **Conclusion :** la fonction $x_0 : t \longmapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est solution particulière de (E).

Petite remarque
Comme mentionné dans leprogramme officiel, la recherche de solution particulière est guidée.

1.c. Résoudre l'équation différentielle (E).

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants telle que :

- l'équation homogène associée admet pour ensemble de solutions l'ensemble $\{t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ (question **1.a**),
- la fonction $x_0 : t \longmapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est solution particulière de (E).

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble $\{t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, autrement dit l'ensemble $\{t \longmapsto (t+\lambda)\mathrm{e}^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) \;:\; \left\{\begin{array}{rcrcr} x'(t) & = & -x(t) & + & y(t) \\ y'(t) & = & & - & y(t) \end{array}\right.$$

2. **2.a.** Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$(S) \iff X'(t) = AX(t) \;\text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

- De façon immédiate : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Puisque A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
  Par conséquent, A admet une unique valeur propre : -1. Raisonnons par l'absurde, et supposons que A est diagonalisable.
  Il existe alors :
  - ⋆ une matrice D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale, constituée des valeurs propres de A ; autrement dit, $D = -I_2$;

⋆ une matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible (matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres) ;

telles que $A = PDP^{-1}$. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= P(-I_2)P^{-1} \\ &= -I_2 \qquad \text{: absurde !} \end{aligned}$$

Conclusion : A n'est pas diagonalisable.

★ Classique ! ★
Une question très classique, il faut faire vite et bien.

2.b. Justifier l'existence d'une unique solution (x, y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

Puisque (S) est un système différentiel linéaire à coefficients constants homogène, le problème $\left\{ \begin{array}{l} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est un problème de Cauchy.

Conclusion : par théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution (x, y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

2.c. Déterminer cette solution (x, y) en vous aidant de la question 1.

Soient x, y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Avec les notations précédentes, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcrcr} x'(t) &=& -x(t) &+& y(t) \\ y'(t) &=& &-& y(t) \end{array} \right. \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\iff \exists \mu \in \mathbb{R} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& -x(t) + y(t) \\ y(t) &=& \mu e^{-t} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) &=& 1 \\ y(0) &=& 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\iff \exists \mu \in \mathbb{R} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& -x(t) + y(t) \\ y(t) &=& \mu e^{-t} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) &=& 1 \\ \mu &=& 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& -x(t) + e^{-t} \\ y(t) &=& e^{-t} \end{array} \right. \\ x(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x(t) = (t + \lambda) e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \end{array} \right. \\ x(0) = 1 \end{array} \right. \qquad \text{question } 1$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x(t) = (t + 1) e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \end{array} \right.$$

2.d. Étudier la convergence de la solution (x, y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.

On a :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

Puis :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ x(t) = te^{-t} + e^{-t}$$

Donc, par croissance comparée et somme :

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

Conclusion : la solution (x, y) converge vers $(0, 0)$ qui est bien un équilibre du système (S).

☞ Rappel...
Les équilibres d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants $X' = AX$ sont les solutions constantes de ce système différentiel. La solution constante égale à 0 est donc toujours un équilibre...
On rappelle aussi que l'ensemble des équilibres se trouve en déterminer $\ker(A)$...

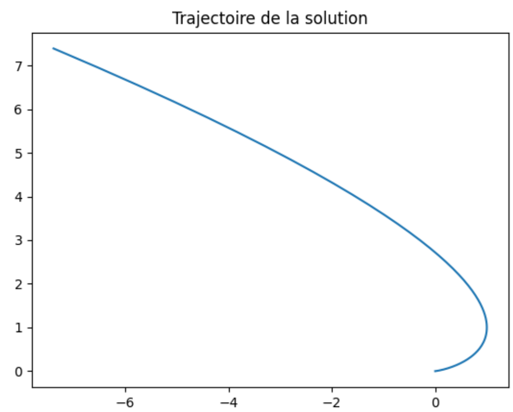
3. Recopier et compléter le programme en langage **Python** ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \longmapsto \big(x(t), y(t)\big)$ pour $t \in [-2; 10]$.

On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=np.linspace(-2,10,200)
x =[... for t in T]
y =[... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution
plt.plot(...)
plt.show()
```



De façon immédiate :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=np.linspace(-2,10,200)
x=[np.exp(-t)+t*np.exp(-t) for t in T]
y=[np.exp(-t) for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Partie B. Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = (x+1)e^{kx}$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. **4.a.** Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et $+\infty$.

- En $+\infty$:
  Puisque $k > 0$, on a :
  $$\lim_{x \to +\infty} kx = +\infty$$
  D'où, par composition et opérations :
  $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty}$$
- En $-\infty$:
  On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x\left(e^x\right)^k + e^{kx}$$
  - ⋆ Puisque $k > 0$, on obtient :
    $$\lim_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$$
  - ⋆ Puisque $k > 0$, par croissance comparée :
    $$\lim_{x \to +\infty} x\left(e^x\right)^k = 0$$

  ✍ Rédaction
  On détaille suffisamment, sans trop en faire non plus sur la croissance comparée, c'est très bien ainsi.

  D'où par somme :
  $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = 0}$$

4.b. Dresser le tableau de variations de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et 0.
La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= e^{kx} + k(x+1)e^{kx} \\ &= (kx+k+1)e^{kx} \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{kx} > 0$$

et :

$$\begin{aligned} kx+k+1 > 0 &\iff kx > -k-1 \\ &\iff x > -\frac{k+1}{k} \end{aligned} \quad k > 0$$

D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{k+1}{k}$		-1		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$					
f_k	0	$\searrow$	$-\frac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. **5.a.** Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) - f_k(x) &= (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} \\ &= (x+1)e^{kx}(e^x - 1) \end{aligned}$$

Or, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:

$$e^x - 1 \geq 0 \iff x \geq 0$$

D'où :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_{k+1}(x) - f_k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion :

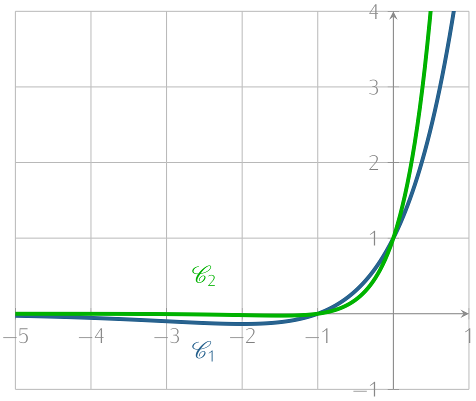
- sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_k$,
- sur $]-1; 0[$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au-dessous de de $\mathscr{C}_k$,
- $\mathscr{C}_{k+1}$ et $\mathscr{C}_k$ se rencontrent en les points de coordonnées $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.

Pourquoi ?

On a vu, dans le tableau de variations, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(-1) = 0$ et $f_k(0) = 1$...

5.b. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

On choisit de le faire pour $k = 1$, par souci de clarté...



Partie C. Étude d'une suite implicite

6. **6.a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Sur $]-\infty; -1[$:
  La fonction f_k est strictement négative sur cet intervalle donc, puisque $k > 0$, l'équation $f_k(x) = k$ ne possède aucune solution sur $]-\infty; -1[$.
- Sur $[0; +\infty[$:
  - ✓ f_k est continue sur $[-1; +\infty[$ (car dérivable),
  - ✓ f_k est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$ (question **4.b**).

  Ainsi, par théorème de bijection, la fonction f_k est bijective de $[-1; +\infty[$ dans $f_k([-1; +\infty[) = [0; +\infty[$.
  Or $k \in \mathbb{N}^*$, donc $k \in f_k([-1; +\infty[)$.
  Par conséquent, l'équation $f_k(x) = k$ possède une unique solution sur $[-1; +\infty[$, notée u_k.

☞ Rappel...

La continuité de f_k garantit que, puisque $[-1; +\infty[$ est un intervalle, $f_k([-1; +\infty[)$ également (TVI)...

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k ; et on a même $u_k > -1$ (et même $u_k > 0$).

6.b. Déterminer explicitement u_1.

Par définition, u_1 est l'unique solution de l'équation $f_1(x) = 1$.

Or, on sait que $f_1(0) = 1$...

> **Conclusion :** $u_1 = 0$.

7. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

- Soit $k ß\mathbb{N}^*$. On a :

$$f_k(0) = 1 \quad ; \quad f_k(u_k) = k$$

et

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) &= \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right)\exp\left(k\frac{\ln(k)}{k}\right) \\ &= \ln(k) + k \end{aligned}$$

Or $k \geq 1$ donc $\ln(k) \geq 0$. Ainsi :

$$f_k(0) \leq f_k(u_k) \leq f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$$

Et donc, par stricte croissance de f_k sur $[0; +\infty[$:

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

> **Conclusion :** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_k \leq \dfrac{\ln(k)}{k}$.

- On a ainsi établi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln(k)}{k} = 0$.

> **Conclusion :** par théorème d'encadrement, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

➠Réflexe !
Pour comparer des antécédents par une fonction strictement monotone, on compare les images ! C'est "toujours" ainsi que l'on procède lorsque l'on souhaite encadrer le terme général d'une suite implicite...

8. 8.a. Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$$

On sait que :

$$f_k(u_k) = k$$

Autrement dit :

$$(u_k + 1)\mathrm{e}^{ku_k} = k$$

Puisque $k > 0$, $u_k + 1 > 0$ (question 7) et $\mathrm{e}^{ku_k} > 0$, on a :

$$\ln(u_k + 1) + ku_k = \ln(k)$$

D'où, puisque $k \neq 0$:

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$$

> **Conclusion :** $u_k = \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{\ln(u_k + 1)}{k}$.

☞ Rappel...
La formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ n'est valable que si $a > 0$ et $b > 0$... En revanche, si $a < 0$ et $b < 0$, on a $\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$.

8.b. En déduire que $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Soit k suffisamment proche de $+\infty$. Ainsi, $\dfrac{\ln(k)}{k} \neq 0$ et d'après la question précédente :

$$\frac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1 - \frac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)}$$

Or, d'après la question 7, $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$. D'où, par composition et opérations :

$$\lim_{k\to+\infty} 1 - \frac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)} = 1$$

Par conséquent :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1$$

Conclusion : $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(k)}{k}$.

9. Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} u_k$?

- On sait que :
  - ✓ $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(k)}{k}$,
  - ✓ $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ u_k \geq 0, \ \dfrac{\ln(k)}{k} \geq 0$.

  Ainsi, par critère d'équivalence sur les séries à terme général positif, on en déduit que les séries $\sum_{k\geq 1} u_k$ et $\sum_{k\geq 1} \dfrac{\ln(k)}{k}$ ont même nature.

- Or :
  - ✓ $\forall k \in [\![3; +\infty[\![, \ 0 \leq \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{\ln(k)}{k}$,
  - ✓ la série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{1}{k}$ est divergente (série de Riemann d'exposant 1, ou série harmonique).

  Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{\ln(k)}{k}$ est divergente.

Conclusion : la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est divergente.

★Subtil...★

Seule la seconde hypothèse de signe est nécessaire, puisqu'elle implique la première : si deux suites sont équivalentes, alors à partir d'un certain rang, elles ont même signe.
Mais ici, on connaît le signe de u_k en question 7.

★ Classique ! ★

Très classique, à traiter et correctement.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$$

> **♡ L'avis du chef ! ♡**
> Un peu d'originalité dans la partie B (qui est assez courte...). Le reste est très classique.

Partie A. Étude de A et de $\mathscr{C}$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Conclusion : on trouve $A^2 = -I_2$, donc A est inversible et $A^{-1} = -A$.

> **☞ Rappel...**
> Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, il existe une matrice B telle que $AB = I$ (ou $BA = I$). Dans ce cas, la matrice B est unique et est appelée **inverse de A**, notée A^{-1}.

2. La matrice A est-il diagonalisable ?
D'après la question précédente, le polynôme $X^2 + 1$ est annulateur de la matrice A. Donc les valeurs propres de A sont parmi les racines de $X^2 + 1$.
Or $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle...

Conclusion : la matrice A n'a pas de valeurs propres réelles, donc n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

> **☞ Pour info...**
> Puisque $X^2 + 1$ possède deux racines complexes distinctes, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$...

3. Justifier que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff AM = MA \\ &\iff \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff M = dI_2 + cA \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathscr{C} &= \{dI_2 + cA \ / \ (c, d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}(I_2, A) \end{aligned}$$

Or $I_2, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$...

Conclusion : $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la famille (I_2, A) est génératrice de $\mathscr{C}$.

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> En regardant l'énoncé, on remarque qu'à la question suivante, on nous demande de résoudre l'équation $AM = MA$... On peut donc, dès cette question, expliciter $\mathscr{C}$ et l'écrire comme espace vectoriel engendré par une famille de matrices. Si la recherche de cet ensemble n'avait pas été si directe (par exemple, voir Ecricome2008E), on procèderait comme dans le commentaire qui suit la question.

> **✓ Rigueur !**
> Il est important de mentionner que $I_2, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour conclure que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

> **Vocabulaire**
> L'ensemble $\mathscr{C}$ (qui est un EV) est appelé **commutant de A**. C'est un très grand classique des concours !

Autre méthode...

Bien entendu, l'énoncé attendait très certainement une autre façon de traiter cette question, que voici...

- Par définition, $\mathscr{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
- La matrice nulle appartient à $\mathscr{C}$ (car $A \times 0_2 = 0_2 \times A$), donc $\mathscr{C}$ est non vide.
- Montrons que $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathscr{C}$. Montrons que $aM + bN \in \mathscr{C}$.
  - ⋆ On a déjà $aM + bN \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
  - ⋆ Puis :
  $$\begin{aligned} A(aM + bN) &= aAM + bAN \\ &= aMA + bNA \quad M, N \in \mathscr{C} \\ &= (aM + bN)A \end{aligned}$$

  Par conséquent : $aM + bN \in \mathscr{C}$.
  $\mathscr{C}$ est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

> **Petite remarque**
> On structure bien cette question... 3 points, puis 2 sous-points dans le troisième !
> En effet, 2 critères pour appartenir à $\mathscr{C}$: être dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et commuter avec A.

4. 4.a. Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Détaillé en question précédente...

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $AM = MA$ est $\{dI_2 + cA \ / \ (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$.

4.b. Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathscr{C}$.

D'après ce qui précède, la famille (I_2, A) est :

✓ génératrice de $\mathscr{C}$,

✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

> **Conclusion :** la famille (I_2, A) est une base de $\mathscr{C}$.

5. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathscr{C}$.

5.a. Montrer que le produit MN appartient à $\mathscr{C}$.

- On a déjà $MN \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} A(MN) & = & AMN & \\ & = & MAN & \quad M \in \mathscr{C}, \text{ donc } AM = MA \\ & = & MNA & \quad N \in \mathscr{C}, \text{ donc } AN = NA \\ & = & (MN)A & \end{array}$$

Vocabulaire
Le point de départ est dû à l'**associativité** du produit matriciel.

> **Conclusion :** $MN \in \mathscr{C}$.

5.b. Montrer que M et N commutent, c'est-à-dire que $MN = NM$.

D'après la question **4.b**, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $M = aI_2 + bA$ et $N = cI_2 + dA$.
Puisque I_2 et A commutent entre elles, on en déduit que $aI_2 + bA$ et $cI_2 + dA$ commutent également entre elles.

> **Conclusion :** M et N commutent.

Petite remarque
De façon générale, toutes les expressions polynomiales en A commutent entre elles...

6. Soit M une matrice non nulle de $\mathscr{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathscr{C}$.

D'après la question **4.b**, il existe deux uniques réels a, b tels que $M = aI_2 + bA = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\det(M) = a^2 + b^2$$

Or $M \neq 0_2$, donc $(a, b) \neq (0, 0)$ et donc $a^2 + b^2 > 0$.
D'où : $\det(M) \neq 0$ et donc la matrice M est inversible et :

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{a}{a^2+b^2} I_2 + \frac{-b}{a^2+b^2} A$$

D'où :

$$M^{-1} \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$$

Autrement dit, d'après la question **4.b** :

$$M^{-1} \in \mathscr{C}$$

> **Conclusion :** toute matrice non nulle de $\mathscr{C}$ est inversible et son inverse appartient à $\mathscr{C}$.

Partie B. Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathscr{C}$

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :

$$P(x) = x^2 + ux + v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant.
Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{C}$ telle que $P(M) = 0_2$.

7. Soit $M = aI_2 + bA$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

7.a. Montrer : $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.

On a :

$$\begin{array}{rcll} M^2 & = & (aI_2 + bA)^2 & \\ & = & a^2 I_2 + 2abA + b^2 A^2 & \quad I_2 \text{ et } A \text{ commutent} \\ & = & a^2 I_2 + 2abA - b^2 I_2 & \quad \text{question } \mathbf{1} \\ & = & (a^2 - b^2) I_2 + 2abA & \end{array}$$

7.b. En déduire :

$$P(M) = 0_2 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2ab + ub & = & 0 \end{array} \right.$$

On a :

$$\begin{array}{rcll} P(M) = 0_2 & \iff & M^2 + uM + vI_2 = 0_2 & \\ & \iff & (a^2 - b^2)I_2 + 2abA + u(aI_2 + bA) + vI_2 = 0_2 & \quad \text{question précédente} \\ & \iff & (a^2 - b^2 + ua + v)I_2 + (2ab + b)A = 0_2 & \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2ab + ub & = & 0 \end{array} \right. & \quad \text{la famille } (I_2, A) \text{ est libre} \end{array}$$

8. Dans cette question, on montre que le système ci-dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en distinguant deux cas :

8.a. Si $\Delta \geq 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.

Supposons $\Delta \geq 0$.
En prenant $b = 0$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2ab + ub & = & 0 \end{array}\right. \iff a^2 + ua + v = 0$$
$$\iff P(a) = 0$$

Or $\Delta \geq 0$, donc P possède au moins une racine. L'équation $P(a) = 0$ possède donc au moins une solution...

> **Conclusion :** si $\Delta \geq 0$, le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.

8.b. Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme (a, b) avec $b \neq 0$.

Supposons $\Delta \geq 0$.
En prenant $b \neq 0$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2ab + ub & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2a + u & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ a & = & \frac{-u}{2} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{u^2}{4} - b^2 - \frac{u^2}{2} + v & = & 0 \\ a & = & \frac{-u}{2} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} b^2 & = & -u^2 + 4v4 \\ a & = & \frac{-u}{2} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} b^2 & = & \frac{-\Delta}{4} \\ a & = & \frac{-u}{2} \end{array}\right. \qquad \Delta < 0, \text{ donc } \frac{-\Delta}{4} > 0$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & \pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \\ a & = & \frac{-u}{2} \end{array}\right.$$

En particulier, on obtient le résultat voulu...

> **Conclusion :** si $\Delta < 0$, le système admet au moins une solution de la forme (a, b) avec $b \neq 0$.

9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

Avec les notations précédentes, on a $u = 1$ et $v = 1$. Ainsi $\Delta = -3$...

> **Conclusion :** d'après la question précédente, on propose la matrice M définie par :
>
> $$M = -\frac{1}{2}I_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Partie C. Un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ \varphi(M) = AMA$$

On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Remarquons déjà que, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  Ainsi, φ est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.
- Montrons que φ est linéaire.
  Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{lcl} \varphi(aM + bN) & = & A(aM + bN)A \\ & = & aAMA + bANA \\ & = & a\varphi(M) + b\varphi(N) \end{array}$$

Ainsi, φ est une application linéaire.

Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

11. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que l'endomorphisme φ est bijectif, et donner φ^{-1}.
   - Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi \circ \varphi(M) &= \varphi\big(\varphi(M)\big) \\ &= \varphi(AMA) \\ &= A(AMA)A \\ &= (-I_2)M(-I_2) \quad \text{$A^2 = -I_2$ d'après la question 1} \\ &= M \end{aligned}$$

   On a ainsi établi :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \ \varphi \circ \varphi(M) = M$$

   Conclusion : $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

   - **Conclusion :** de façon immédiate, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \varphi$.

Pourquoi ?
Raisonnement analogue à celui sur les matrices...

12. 12.a. Calculer $\varphi(E_1)$, ..., $\varphi(E_4)$, puis donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On trouve :

$$\varphi(E_1) = -E_4 \ \ ; \ \ \varphi(E_2) = E_3 \ \ ; \ \ \varphi(E_3) = E_2 \ \ ; \ \ \varphi(E_4) = -E_1$$

D'où :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.b. Justifier sans calcul que B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1; 1\}$.
(On pourra remarquer que $B^2 = I_4$, où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.)

- La matrice B est symétrique à coefficients réels.

  Conclusion : d'après le théorème spectral, B est diagonalisable.

- Ensuite :
  - ⋆ Puisque $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, on a $B^2 = I_4$.
    Ainsi, le polynôme $X^4 - 1$ est annulateur de B. Or :

$$X^4 - 1 = (X^2-1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$$

    Donc les racines de $X^4 - 1$ sont -1 et 1.
    Par conséquent :

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \{-1; 1\}$$

  - ⋆ Montrons que -1 et 1 sont valeurs propres de B.
    - ◇ Pour -1 :
      On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(B + I_4) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_4 = -C_1 \text{ et } C_3 = C_2 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est libre, car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires} \\ &= 2 \end{aligned}$$

      Puisque $\mathrm{rg}(B + I_4) \neq 4$, on en déduit que -1 est valeur propre de B.
    - ◇ Pour 1 :
      De la même façon, on trouve $\mathrm{rg}(B - I_4) = 2 \neq 4$, donc 1 est valeur propre de B.

Petite remarque
Il n'est pas probablement pas nécessaire de tout détailler sur la copie pour obtenir les points.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(B) = \{-1; 1\}$.

12.c. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de B.
Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, notons $E_\lambda(B)$ le sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ.

- Pour $E_{-1}(B)$:
On avait obtenu $\mathrm{rg}(B+I_4) = 2$. Or, d'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathcal{M}_4(\mathbb{R})\right) = \dim\left(\ker(B+I_4)\right) + \mathrm{rg}(B+I_4)$$

D'où :

$$\dim\left(\ker(B+I_4)\right) = 2$$

Ensuite, on remarque que $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \ker(B+I_4)$. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est ainsi une famille de $E_{-1}(B)$ qui est :

✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires,

✓ de cardinal 2, égal à $\dim\left(E_{-1}(B)\right)$.

Conclusion : La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(B)$.

- Pour $E_1(B)$:
On procède de la même façon...

Conclusion : La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(B)$.

À retenir...
Pour déterminer le rang de $B+I_4$, on avait remarqué que $C_1 + C_4 = 0$. Cette relation sur les colonnes nous fournit un vecteur dans le noyau de $B+I_4$. En effet, il suffit de remarquer que $C_1+C_4 = (B+I_4) \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$...

Confusion d'objets !
On demande bien les espaces propres pour B, et pas pour φ. Il est donc important de conclure avec le bon objet : des matrices colonnes.
En revanche, si l'énoncé avait demandé des bases des sous-espaces propres de φ (bien que la notion d'espace propre d'endomorphisme ne soit plus au programme), on aurait pu procéder de la même façon, et simplement conclure en revenant aux objets sur lesquels φ agit, à savoir des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On aurait alors obtenu :
- (I_2, A) est une base de $E_{-1}(\varphi)$,
- $(E_1 - E_4, E_2 + E_3)$ est une base de $E_1(\varphi)$.

Exercice 3

♡ L'avis du chef ! ♡
Là encore, exercice assez classique sur le problème du collectionneur, déjà tombé plusieurs fois à l'époque de la filière ECE. Pas très long, détaillé et accessible en fin de 1A (sauf dernière question).
Mention spéciale pour les questions **Python** qui se situent au début du sujet (auparavant les questions d'informatique arrivaient essentiellement en fin d'exercices) : c'est très bien !

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier $i \in [\![1;N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A. Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.
   - Expérience : l'expérience consiste à choisir de manière équiprobable une boule numérotée de 1 à N parmi N boules possibles.
   - Variable aléatoire : X_k prend comme valeur le numéro de la boule tirée.

   Conclusion : X_k suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$.
   Ainsi : $X_k(\Omega) = [\![1;N]\!]$ et pour tout $i \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_k = i]\big) = \dfrac{1}{N}$.

2. Le programme en langage **Python** ci-dessous définit une fonction **ajout** qui prend en argument une liste **L** et un entier **x**.

```
def ajout(L,x):
    if (x in L)==False:
        L.append(x)
```

   Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande **ajout(L,x)** modifie la liste **L**.
   - Si la liste **L** contient déjà l'entier **x**, alors l'exécution de **ajout(L,x)** ne modifie pas la liste **L**.
   - Si la liste **L** ne contient pas l'entier **x**, alors l'exécution de **ajout(L,x)** ajoute l'entier **x** à la fin de la liste **L**.

3. Recopier et compléter la fonction **Python** **Simul_T** ci-dessous.
   Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1;N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :
   - **L** la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
   - **k** le rang du tirage en cours ;
   - **x** le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L=[]
    k=0
    while ...:
        x=rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k=...
    return (...)
```

   La variable aléatoire T_i prend la valeur du nombre de tirages nécessaires à l'obtention de i boules différentes. Il faut donc effectuer des tirages tant que le nombre de boules différentes obtenues est strictement inférieur à i ; puis incrémenter de 1 le compteur de tirages. On propose donc :

   Petite remarque
   A l'écrit, on se contente de donner les lignes complétées sans expliquer le raisonnement derrière.

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L=[]
    k=0
    while len(L)<i:
```

```
        x=rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k=k+1
    return(k)
```

4. On suppose $N = 3$.
Rédiger un programme **Python** qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de **Simul_T(3,2)**.
Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

- On propose le programme suivant :

```
S=0
for k in range(100):
    S=S+Simul_T(3,2)
print(S/100)
```

Petite remarque
Bien entendu, on peut sommer les résultats d'une liste définie en compréhension...

- Le programme proposé permet d'afficher la moyenne empirique obtenue sur 100 réalisations indépendantes de la variable aléatoire T_2 dans le cas où $N = 3$.
D'après la loi faible des grands nombres, cette moyenne empirique fournit une valeur approchée de l'espérance de T_2 (à condition que cette espérance existe...).

Précisions sur la LfGN...

Rappelons l'énoncé de la loi faible des grands nombres.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes**, admettant toutes **la même espérance m** et **la même variance σ^2** (c'est le cas si elles ont toutes la même loi) alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon]\right) = 0$$

Conséquence : pour n suffisamment grand, on peut considérer qu'une réalisation de $\overline{X_n}$ fournit une valeur approchée de m.

Ici, on l'applique avec une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que T_2 : les 100 réalisations de T_2 indépendantes.
On pourrait introduire 100 variables aléatoires indépendantes suivantes toutes la même loi que T_2, mais un tel niveau de détail n'est très certainement pas attendu.
En revanche, il est fréquent que l'énoncé demande de citer précisément la loi faible des grands nombres : il faut en être capable !

Partie B. Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.

Conclusion : $T_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$.

Petite remarque
L'énoncé dit "donner". Aucune justification n'est donc attendue...

6. Soit $k \geq 2$ un entier fixé.

6.a. Décrire l'évènement $[T_2 = k] \cap [X_1 = 1]$ à l'aide des évènements $[X_j = 1]$ et $[X_j \neq 1]$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.

L'évènement $[T_2 = k] \cap [X_1 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on tire la boule numéro 1 au premier tirage et il faut k tirages pour obtenir une boule différente
si, et seulement si, on tire la boule numéro 1 aux tirages 1 à $k-1$ et une des deux autres boules au k-ième tirage

Conclusion : $[T_2 = k] \cap [X_1 = 1] = \left(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k-1} [X_j = 1]\right) \cap [X_k \neq 1]$.

6.b. En déduire $\mathbb{P}\left([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]\right)$.

D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]\big) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} [X_j = 1]\right) \cap [X_k \neq 1]\right) & \text{les variables aléatoires } X_1, \dots, X_k \text{ sont indépendants, car les tirages sont effectués avec remise} \\
& = & \left(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}\big([X_j = 1]\big)\right) \times \mathbb{P}\big([X_k \neq 1]\big) & \text{équiprobabilité du choix de la boule et } N = 3 \\
& = & \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3} & \\
& = & \frac{2}{3^k} &
\end{array}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]\big) = \dfrac{2}{3^k}$.

6.c. Montrer que $\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_1 = 1], [X_2 = 2], [X_1 = 3]\big)$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big) & = & \mathbb{P}\big([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([T_2 = k] \cap [X_1 = 2]\big) + \mathbb{P}\big([T_2 = k] \cap [X_1 = 3]\big) & \text{par symétrie des rôles des boules 1,2 et 3, les probabilités sont égales} \\
& = & 3 \times \mathbb{P}\big([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]\big) & \text{question précédente} \\
& = & 3 \times \frac{2}{3^k} & \\
& = & \frac{2}{3^{k-1}} &
\end{array}$$

Conclusion : $T_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ et, pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.

7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.

- On sait que :

$$\begin{array}{lll}
T_2 \text{ admet une espérance} & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{k \in T_2(\Omega)} k\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big) \text{ est absolument convergente} \\
& \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{k \geq 2} k\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big) \text{ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif}
\end{array}$$

- Soit $N \in [\![2; +\infty[\![$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{k=2}^{N} k\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big) & = & \sum\limits_{k=2}^{N} k \frac{2}{3^{k-1}} \\
& = & 2 \sum\limits_{k=2}^{N} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}
\end{array}$$

Or $\dfrac{1}{3} \in]-1; 1[$, donc la série $\sum\limits_{k \geq 2} k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ est une troncature de série géométrique convergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{k \geq 2} k\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big)$ est convergente.

- On en déduit que T_2 admet une espérance et :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(T_2) & = & 2 \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
& = & 2 \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 1\right) \\
& = & 2 \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - 1\right) \\
& = & 2 \left(\frac{9}{4} - 1\right) \\
& = & \frac{5}{2}
\end{array}$$

Conclusion : T_2 admet une espérance et $\mathbb{E}(T_2) = \dfrac{5}{2}$.

8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

- Puisque $T_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$, on a $Z_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z_2 = n]\big) &= \mathbb{P}\big([T_2 - 1 = n]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([T_2 = n + 1]\big) \\
&= \frac{2}{3^n} \quad \text{question 6.c, licite car } n \in \mathbb{N}^*, \text{ donc } n+1 \in [\![2; +\infty[\![\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$
On en déduit que Z_2 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.
- Par conséquent, Z_2 admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_2) = \frac{3}{2}$.
Puis :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_2) &= \mathbb{E}(Z_2 + 1) \quad \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{3}{2} + 1 \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$
- Ensuite, on sait que Z_2 admet une variance. Or $T_2 = Z_2 + 1$. Donc T_2 admet également une variance et :
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(T_2) &= \mathbb{V}(Z_2 + 1) \\
&= \mathbb{V}(Z_2) \\
&= \frac{1 - \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

☞ **Rappel...**
Si X admet une variance, alors pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Partie C. Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.

Pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :
$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1}-ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.
On admet que les variable aléatoires $Z_1, \ldots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2; N]\!]$.

9.a. Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N - i + 1}{N}$.

- Expérience : après le tirage ayant permis d'obtenir le $(i-1)$-ème numéro différent, l'expérience s'assimile à une infinité de répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont le succès "obtenir l'un des $N - (i-1)$ numéro qui ne sont pas déjà sortis" a pour probabilité $\frac{N-(i-1)}{N}$, par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne.
- Variable aléatoire : la variable aléatoire Z_i prend alors comme valeur le rang du premier succès.

> **Conclusion :** Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N - i + 1}{N}$.

9.b. Exprimer $\mathbb{E}(Z_i)$ et $\mathbb{V}(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.

- Puisque Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N - i + 1}{N}$, Z_i admet une espérance et une variance, et :
$$\mathbb{E}(Z_i) = \frac{N}{N - i + 1}$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_i) &= \frac{1 - \frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{i-1}{N}}{\frac{(N-i+1)^2}{N^2}} \\
&= \frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}
\end{aligned}$$

- Puisque Z_1 est constante égale à 1, elle admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(Z_1) = 1 \quad ; \quad \mathbb{V}(Z_1) = 0$$

Les expressions obtenues dans le cas $i \geq 2$ sont donc encore valables.

Conclusion : pour tout $i \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{E}(Z_i) = \dfrac{N}{N-i+1}$ et $\mathbb{V}(Z_i) = \dfrac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}$.

10. Soit $i \in [\![1;N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \ldots, Z_i$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{i} Z_k &= Z_1 + \sum_{k=2}^{i} Z_k \\
&= Z_1 + \sum_{k=2}^{i} (T_k - T_{k-1}) && \text{télescopage} \\
&= Z_1 + T_i - T_1 && \text{T_1 et Z_1 sont toutes deux définies sur le même espace probablisé et constantes égales à 1, donc sont égales} \\
&= T_i
\end{aligned}$$

Conclusion : $T_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k$.

✘ Attention !
On veille à séparer la somme puisqu'il y a deux expressions différentes de Z_k, selon que $k = 1$ ou $k \geq 2$.
Au passage, la relaton de Chasles est bien valide, même si $= 1$, en prenant la convention $\displaystyle\sum_{k \in \varnothing} a_k = 0$.

Loi de T_3

11. 11.a. Calculer $\mathbb{P}\big([Z_2 = \ell] \cap [Z_3 = k]\big)$ pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$.

Soient $\ell, k \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance des variables aléatoires Z_2 et Z_3, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z_2 = \ell] \cap [Z_3 = k]\big) &= \mathbb{P}\big([Z_2 = \ell]\big)\mathbb{P}\big([Z_3 = k]\big) \\
&= \frac{N-1}{N}\left(1 - \frac{N-1}{N}\right)^{\ell-1} \frac{N-2}{N}\left(1 - \frac{N-2}{N}\right)^{k-1} && Z_2 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{N-1}{N}\right) \text{ et } Z_2 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{N-2}{N}\right) \text{ et } \ell, k \in \mathbb{N}^* \\
&= \frac{N-1}{N}\big(\frac{1}{N^{\ell-1}} \frac{N-2}{N} \frac{2^{k-1}}{N^{k-1}} \\
&= \frac{2^{k-1}(N-1)(N-2)}{N^{\ell+k}}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Z_2 = \ell] \cap [Z_3 = k]\big) = \dfrac{2^{k-1}(N-1)(N-2)}{N^{\ell+k}}$.

♡ L'avis du chef ! ♡
Quel intérêt de détailler ainsi les questions 11.a et 11.b ? Il serait préférable de demander directement la question 11.b pour mieux tester les réflexes des candidates et candidats.

11.b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}\big([Z_2 + Z_3 = n]\big) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right)$$

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Z_3 = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\big([Z_2 + Z_3 = n] \cap [Z_3 = k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z_2 + Z_3 = n]\big) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_2 + Z_3 = n] \cap [Z_3 = k]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_2 = n-k] \cap [Z_3 = k]\big) && \forall k \in \mathbb{N}^*,\ n-k \in Z_2(\Omega) \iff k \leq n-1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([Z_2 = n-k] \cap [Z_3 = k]\big) && \text{question précédente, licite car : } \forall k \in [\![1;n-1]\!],\ k \geq 1 \ ;\ n-k \geq 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k-1}(N-1)(N-2)}{N^{n-k+k}} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} && \text{changement d'indice } i = k-1 \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{i=0}^{n-2} 2^i && 2 \neq 1 \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \frac{1 - 2^{n-1}}{1-2} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} (2^{n-1} - 1) \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{2N^n} (2^n - 2) \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right)
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbb{P}\big([Z_2 + Z_3 = n]\big) = \dfrac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\dfrac{2}{N}\right)^n - \dfrac{2}{N^n}\right)$.

11.c. Déterminer la loi de T_3.

On sait que $T_3(\Omega) = [\![3;+\infty[\![$. Soit ainsi $k \in [\![3;+\infty[\![$.
D'après la question **10**, on sait que $T_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([T_3 = k]\big) &= \mathbb{P}\big([Z_1 + Z_2 + Z_3 = k]\big) && \text{Z_1 est constante égale à 1}\\
&= \mathbb{P}\big([Z_2 + Z_3 = k-1]\big) && \text{question précédente, licite car $k \geq 3$, donc $k-1 \geq 2$}\\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N}\right)^{k-1} - \frac{2}{N^{k-1}}\right)
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $T_3(\Omega) = [\![3;+\infty[\![$
>
> Pour tout $k \in [\![3;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([T_3 = k]\big) = \dfrac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\dfrac{2}{N}\right)^{k-1} - \dfrac{2}{N^{k-1}}\right)$.

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1;N]\!]$, montrer que $\mathbb{E}(T_i) = N \displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$.

D'après la question **10** : $T_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k$.

Ainsi, T_i admet une espérance, comme somme de variables aléatoires admettant une espérance (les Z_k suivent des lois géométriques) et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_i) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{i} Z_k\right) && \text{linéarité de l'espérance}\\
&= \sum_{k=1}^{i} \mathbb{E}(Z_k) && \text{question 9.b}\\
&= \sum_{k=1}^{i} \frac{N}{N-k+1}\\
&= N \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{N-k+1} && \text{changement d'indice $j = N-k+1$}\\
&= N \sum_{j=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq j \leq N$, montrer que

$$\mathrm{Cov}(T_i, T_j) = \mathbb{V}(T_i)$$

où $\mathrm{Cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(T_i, T_j) &= \mathrm{Cov}\left(T_i, T_i + \sum_{k=i+1}^{j} Z_k\right) && \text{linéarité à droite de la covariance}\\
&= \mathrm{Cov}(T_i, T_i) + \sum_{k=i+1}^{j} \mathrm{Cov}\,(T_i, Z_k)
\end{aligned}$$

> **Petite remarque**
> Tout ce qui suit est encore valable si $j = i$, la somme étant alors indexée sur un ensemble vide...

Or les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_j$ sont mutuellement indépendantes. Ainsi, pour tout $k \in [\![i+1;j]\!]$, par lemme des coalitions, les variables aléatoires $\displaystyle\sum_{n=1}^{i} Z_n$ et Z_k sont indépendantes. Autrement dit, pour tout $k \in [\![i+1;j]\!]$, les variables aléatoires T_i et Z_k sont indépendantes. D'où :

$$\forall k \in [\![i+1;j]\!],\ \mathrm{Cov}(T_i, Z_k) = 0$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(T_i, T_j) &= \mathrm{Cov}(T_i, T_i)\\
&= \mathbb{V}(T_i)
\end{aligned}$$

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★