Concours blanc 2 - Épreuve 2

Jeudi 7 mars - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Vieillir ensemble, ce n'est pas ajouter des années à la vie, mais de la vie aux années."
Jacques Salomé

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Sous réserve d'existence, on notera $\mathbb{E}(T)$ son espérance.
On notera F_T la fonction de répartition de cette variable aléatoire et on appelle *fonction de survie* du composant la fonction R_T définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \; R_T(t) = 1 - F_T(t)$$

Le problème se compose de trois parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie I. Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $R_T(n) \neq 0$.

1. **Taux de panne.**
Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle *taux de panne* à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T = n]\big)$$

1.a. 1.a.i. Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la probabilité $\mathbb{P}\big([T = n]\big)$ à l'aide de la fonction R_T. En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{R_T(n-1) - R_T(n)}{R_T(n-1)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} R_T(n) &= 1 - F_T(n) \\ &= 1 - \mathbb{P}\big([T \leq n]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([T > n]\big) \end{aligned}$$

Or :

$$[T \geq n] = [T = n] \cup [T > n]$$

D'où, par incompatibilité de $[T = n]$ et $[T > n]$, on a :

$$\mathbb{P}\big([T \geq n]\big) = \mathbb{P}\big([T = n]\big) + \mathbb{P}\big([T > n]\big)$$

Or T est à valeurs entières, donc $[T \geq n] = [T > n-1]$ Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([T = n]\big) &= \mathbb{P}\big([T > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([T > n]\big) \\ &= R_T(n-1) - R_T(n) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \mathbb{P}\big([T = n]\big) = R_T(n-1) - R_T(n)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, on sait que $R_T(n-1) \neq 0$, d'où :

$$\begin{aligned} \pi_n &= \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T = n]\big) \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([T = n] \cap [T > n-1]\big)}{\mathbb{P}\big([T > n-1]\big)} && [T = n] \subset [T > n-1] \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([T = n]\big)}{R_T(n-1)} && \text{point précédent} \\ &= \frac{R_T(n-1) - R_T(n)}{R_T(n-1)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \pi_n = \dfrac{R_T(n-1) - R_T(n)}{R_T(n-1)}$.

1.a.ii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 0 \leq \pi_n < 1$$

ainsi que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; R_T(n) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \pi_k)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - ⋆ Puisque π_n est une probabilité conditionnelle, on a déjà : $0 \leq \pi_n \leq 1$.
  - ⋆ Ensuite, d'après la question précédente :

$$\pi_n = 1 - (\frac{R_T(n)}{R_T(n-1)}$$

Or $R_T(n) \neq 0$, donc $\pi_n \neq 1$.

➠Réflexe !
On manipule un peu l'expression pour essayer de mieux cerner l'objet étudié.

Petite remarque
On pouvait également partir de $[T \leq n] = [T = n] \cup [T < n]$ puis travailler sur F_T pour reconstruire R_T.

Important !
L'argument porte sur T, et pas sur n !
En effet, puisque T est à valeurs entières, on a aussi $[T \geq 43, 17] = [T > 42, 17]$...

Petite remarque
Puisque F_T est croissante, la fonction R_T est décroissante. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; R_T(n-1) \geq R_T(n)$$

Cohérent avec le résultat annoncé.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \pi_n < 1.$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \pi_k = 1 - \frac{R_T(k)}{R_T(k-1)}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n}(1-(\pi_k) &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{R_T(k)}{R_T(k-1)}\right) && \text{télescopage} \\ &= \frac{R_T(n)}{R_T(0)} && T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*\text{, donc } F_T(0)=0\text{, donc } R_T(0)=1 \\ &= R_T(n) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_T(n) = \prod_{k=1}^{n}(1-\pi_k).$

Petite remarque

On peut également procéder par récurrence, mais c'est tout de même plus direct ainsi !

1.a.iii. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, on a $\pi_n = \mathbb{P}_{[T\geq n]}\big([T=n]\big)$. *Cette expression permet de définir le taux de panne à l'instant 0.* Calculer π_0.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque T est à valeurs entières, on a $[T > n-1] = [T \geq n]$. D'où le résultat.
- Ainsi :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \mathbb{P}_{[T\geq 0]}\big([T=0]\big) \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([T=0]\cap[T\geq 0]\big)}{\mathbb{P}\big([T\geq 0]\big)} && [T=0]\subset[T\geq 0] \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([T=0]\big)}{\mathbb{P}\big([T\geq 0]\big)} && T(\Omega)\subset\mathbb{N}^*\text{, donc } \mathbb{P}\big([T\geq 0]\big)=1 \\ &= \mathbb{P}\big([T=0]\big) && T(\Omega)\subset\mathbb{N}^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.b. Soit $p \in]0,1[$. On suppose que T suit la loi géométrique de paramètre p.

1.b.i. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?

Conclusion : T admet une espérance et $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p}$.

1.b.ii. Calculer, pour tout entier naturel n, $R_T(n)$ en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $R_T(n) = \mathbb{P}\big([T>n]\big)$.
Or $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc :

$$[T>n] = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty}[T=k]$$

Ainsi, par incompatibilité des évènements de la famille $\big([T=k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$, la série $\sum_{k\geq n+1}\mathbb{P}([T=k])$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T>n]) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}([T=k]) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n}(1-p)^{k-1}p && \text{changement d'indice } i=k-(n+1) \\ &= p\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^{i+n} \\ &= p(1-p)^n\frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ R_T(n) = (1-p)^n.$

1.b.iii. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **1.a.i** :

$$\begin{aligned} \pi_n &= \frac{R_T(n-1)-R_T(n)}{R_T(n-1)} && \text{question précédente, licite car } n, n-1\in\mathbb{N}\text{ (car } n\in\mathbb{N}^*) \\ &= \frac{(1-p)^{n-1}-(1-p)^n}{(1-p)^{n-1}} \\ &= 1-(1-p) \\ &= p \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \pi_n = p$.

1.c. Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on ait : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \pi_n = \alpha$.

1.c.i. Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $R_T(n) = (1-\alpha)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **1.a.ii**, on a :

$$R_T(n) = \prod_{k=1}^{n}(1-\pi_k)$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \ \pi_k = \alpha$. D'où le résultat.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ R_T(n) = (1-\alpha)^n$.

1.c.ii. En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

On connaît la fonction de survie et on souhaite retrouver la loi de T... Utilisons le résultat de la question **1.a.i**. Pour cela, nous aurons besoin de la relation précédente quand $n = 0$...

- On sait que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{P}\big([T > 0]\big) = 1$, autrement dit, $R_T(0) = 1$.
  Par conséquent, l'expression trouvée en question précédente est valable pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **1.a.i** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big([T=n]\big) & = & R_T(n-1) - R_T(n) \\ & = & (1-\alpha)^{n-1} - (1-\alpha)^n \\ & = & (1-\alpha)^{n-1}\alpha \end{array}$$

question précédente, licite car $n, n-1 \in \mathbb{N}$ (car $n \in \mathbb{N}^*$)

- En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big([T=n]\big) \neq 0$$

D'où :

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Petite remarque
Cette dernière étape c'est du bonus ; elle n'est pas nécessaire (et pas attendue) pour conclure. Mais ça fait plaisir tout de même... Il ne faut cependant pas s'y attarder.

Conclusion : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([T=n]\big) = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$.
La variable aléatoire T suit donc la loi géométrique de paramètre α.

1.d. Que conclure des questions **1.b** et **1.c** ?

En question **1.b**, on a démontré que si T suit la loi géométrique de paramètre p, alors son taux de panne associé est constant.

En question **1.c**, on a établi la réciproque ; à savoir que si le taux de panne est constant égale à α, alors T suit la loi géométrique de paramètre α.

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre α si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n = \alpha$.

Petite remarque
En particulier : les lois géométriques sont les seules lois sur $\mathbb{N}^*$ dont le taux de panne est constant.

2. **Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.**

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On considère à nouveau dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et on suppose que T suit la loi géométrique de paramètre p et que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du i-ème composant est une variable aléatoire T_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi que T.

Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel k non nul, on pose : $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} T_i$.

La variable aléatoire S_k désigne donc l'instant où se produit la k-ième panne et le k-ième remplacement.

2.a. Soit m un entier naturel. Démontrer par récurrence sur n, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geq m$, l'égalité : $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

- **Initialisation.** Pour $n = m$:
  On a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=m}^{m} \binom{j}{m} & = & \binom{m}{m} \\ & = & 1 \\ & = & \binom{m+1}{m+1} \end{array}$$

✘ Attention !
On initialise à $n = m$, c'est l'énoncé qui le dit !

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in [\![m; +\infty[\![$. Supposons $\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Montrons : $\sum_{j=m}^{n+1} \binom{j}{m} = \binom{n+2}{m+1}$.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{n+1} \binom{j}{m} &= \sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} + \binom{n+1}{m} && \text{hypothèse de récurrence}\\ &= \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} && \text{relation de Pascal}\\ &= \binom{n+1}{m+1}\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in [\![m; +\infty[\![,\ \sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

2.b. 2.b.i. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

- Puisque $T_1(\Omega) = T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a : $S_2(\Omega) \subset [\![2; +\infty[\![$.
- Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\left([T_1 = k]\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left([T_1 = k] \cap [S_2 = n]\right)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([S_2 = n]\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([T_1 = k] \cap [S_2 = n]\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([T_1 = k] \cap [T_2 = n-k]\right) && \text{indépendance de } T_1 \text{ et } T_2\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([T_1 = k]\right)\mathbb{P}\left([T_2 = n-k]\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([T_1 = k]\right)\mathbb{P}\left([T_2 = n-k]\right) && \begin{array}{l}\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k \in T_1(\Omega)\\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ n-k \in T_2(\Omega) \iff n-k \geq 1 \iff k \leq n-1\end{array}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left([T_1 = k]\right)\mathbb{P}\left([T_2 = n-k]\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{n-k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2}\\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}\end{aligned}$$

✘ Attention !
On sait qu'il faut être attentif sur cette partie là du calcul... On pense à bien détailler et à vérifier, au moment de remplacer, que les entiers k et $n-k$ sont bien dans $T_1(\Omega)$ et $T_2(\Omega)$ respectivement...

Conclusion : $S_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ et pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\mathbb{P}\left([S_2 = n]\right) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

Petite remarque
Cohérent avec le résultat de la question suivante...

2.b.ii. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \in [\![k; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\left([S_k = n]\right) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Commençons déjà par remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Z_k(\Omega) \subset [\![k; +\infty[\![$.
Procédons ensuite par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $k = 1$:
On sait que $S_1 = X_1$ et que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([S_1 = n]\right) &= p(1-p)^{n-1}\\ &= \binom{n-1}{0} p^1 (1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons : "$\forall n \in [\![k;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([S_k = n]\big) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$".
  Montrons : "$\forall n \in [\![k+1;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([S_{k+1} = n]\big) = \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}$".
  Soit $n \in [\![k+1;+\infty[\![$. On a $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.
  D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_{k+1} = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{i \geq 1} \mathbb{P}\big([S_{k+1} = n] \cap [X_{k+1} = i]\big)$ est convergente et :

Petite remarque
On peut également prendre $\big([S_k = i]\big)_{i \in [\![k;+\infty[\![}$ comme SCE. Cela rend peut-être la fin plus facile à voir...

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([S_{k+1} = n]\big) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([S_{k+1} = n] \cap [X_{k+1} = i]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([S_k + X_{k+1} = n] \cap [X_{k+1} = i]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([S_k = n-i] \cap [X_{k+1} = i]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([S_k = n-i]\big)\mathbb{P}\big([X_{k+1} = i]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}\big([S_k = n-i]\big)\mathbb{P}\big([X_{k+1} = i]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-i-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-i-k} p (1-p)^{i-1} \\
&= p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-i-1}{k-1} \\
&= p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \sum_{j=k-1}^{n-2} \binom{j}{k-1} \\
&= p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \binom{n-1}{k}
\end{aligned}
$$

$X_1, \ldots, X_{k+1}$ indépendantes, donc par lemme des coalitions : S_k et X_{k+1} indépendantes

$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ n-i \in [\![k;+\infty[\![\iff i \leq n-k$
$S_k(\Omega) \subset [\![k;+\infty[\![$, donc si $i > n-k$, alors $\mathbb{P}\big([S_k = n-i]\big) = 0$

par hypothèse de récurrence (licite car : $\forall i \in [\![1;n-k]\!],\ n-i \geq k$

$j = n-i-1$

question **2.a** licite car $k-1 \in \mathbb{N}$ et $n-2 \geq k-1$ (car $n \geq k+1$)

L'hérédité est ainsi établie.

> **Conclusion :** pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_k est donnée par :
> $$\forall n \in [\![k;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([S_k = n]\big) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

2.c. 2.c.i. Écrire une fonction **Python** d'en-tête **def simulS(k,p)**, qui prend en arguments d'entrée un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et un réel $p \in]0;1[$, puis renvoie une réalisation de S_k.
Plusieurs possibilités :

```python
import numpy.random as rd

def simulS(k,p):
    S=0
    for i in range(1,k+1):
        T=rd.geometric(p)
        S=S+T
    return S

def simulS_bis(k,p):
    L=[rd.geometric(p) for i in range(k)]
    return sum(L)

def simulS_ter(k,p):
    L=rd.geometric(p,k)
    return sum(L)
```

2.c.ii. De quelle valeur l'exécution du programme suivant fournit-elle une valeur approchée ? Justifier en mentionnant soigneusement le théorème utilisé.

```python
L=[simulS(10,0.2) for k in range(1000)]
print(sum(L)/len(L))
```

- Ce programme permet l'affichage de la moyenne empirique obtenue sur 1000 réalisations indépendantes de S_{10} dans le cas où $p = 0,2$.

- Puisque S_{10} est la somme de variables aléatoires admettant une variance, S_{10} admet une variance.
  Ainsi, d'après la loi faible des grands nombres, la moyenne empirique obtenue fournit une valeur approchée de $\mathbb{E}(S_{10})$.
- Or S_{10} admet une espérance (car elle admet une variance) et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{10}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{10} T_i\right) && \text{linéarité de l'espérance}\\ &= \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}(T_i) && \forall i \in [\![1;10]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathscr{G}(0,2)\\ &= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{0,2}\\ &= 50\end{aligned}$$

Conclusion : la valeur affichée sera proche de 50.

Précisions sur la LfGN...

Rappelons l'énoncé de la loi faible des grands nombres.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes**, admettant toutes **la même espérance m** et **la même variance σ^2** (c'est le cas si elles ont toutes la même loi) alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon]\right) = 0$$

Ici, on l'applique avec une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que S_{10} : les 1000 réalisations de S_{10} indépendantes.
On pourrait introduire 1000 variables aléatoires indépendantes suivantes toutes la même loi que S_{10}, mais un tel niveau de détail n'est très certainement pas attendu.
En revanche, il est fréquent que l'énoncé demande de citer précisément la loi faible des grands nombres : il faut en être capable !

2.d. Soit n un entier strictement positif. On note U_n la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus.

2.d.i. Que permet de simuler la fonction **Python** suivante ? Justifier soigneusement la réponse.

```python
import numpy.random as rd

def mystere(n,p):
    S=rd.geometric(p)
    nb=0
    while S<=n:
        nb=nb+1
        S=S+rd.geometric(p)
    return nb
```

- La variable `S` prendra comme valeurs des sommes de réalisations de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p, elle représente donc une réalisation de la variable aléatoire S_k, où k est ainsi le nombre de pannes ayant eu lieu.
- Ici, ce nombre de pannes est représenté par la variable `nb` qui compte le nombre de fois où `S` a été incrémentée (pas nécessairement de 1 en 1...).
- L'incrémentation a lieu tant que `S` est inférieur ou égal à `n` ; autrement dit, puisque `S` est la somme des durées de vie, tant que la durée de vie total est inférieure ou égale à `n`.

Par conséquent, la fonction `mystere` renvoie le nombre de pannes ayant eu lieu jusqu'à l'instant `n` inclus.

Conclusion : la fonction `mystere` renvoie une réalisation de la variable aléatoire U_n.

2.d.ii. Établir l'égalité $\mathbb{P}([U_n = 0]) = (1-p)^n$ et calculer $\mathbb{P}([U_n = n])$.

➠Réflexe ! On travaille sur les évènements...

- On a :

$[U_n = 0]$ est réalisé	si, et seulement si,	aucune panne n'a eu lieu jusqu'à l'instant n inclus
	si, et seulement si,	le premier composant est encore fonctionnel à l'instant n
	si, et seulement si,	le premier composant a une durée de vie strictement supérieure à n
	si, et seulement si,	l'évènement $[T_1 > n]$ est réalisé

Ainsi :

$$[U_n = 0] = [T_1 > n]$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([U_n = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([T_1 > n]\big) && T_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \text{ et question 1.b.ii} \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

- On a :

$[U_n = n]$ est réalisé	si, et seulement si,	n pannes ont eu lieu jusqu'à l'instant n inclus
	si, et seulement si,	il y a eu une panne à chaque instant des instants 1 à n
	si, et seulement si,	les composants 1 à n ont tous eu une durée de vie égale à 1
	si, et seulement si,	l'évènement $[T_1 = 1] \cap \ldots \cap [T_n = n]$ est réalisé

Ainsi :

$$[U_n = 0] = \bigcap_{i=1}^{n} [T_i = 1]$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([U_n = n]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [T_i = n]\right) && \text{indépendance mutuelle de } T_1, \ldots, T_n \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([T_i = 1]\big) && \forall i \in [\![1; n]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \\ &= p^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([U_n = 0]\big) = (1-p)^n$ et $\mathbb{P}\big([U_n = n]\big) = p^n$.

2.d.iii. Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, l'événement $[U_n \geq k]$ à l'aide d'un événement faisant intervenir la variable aléatoire S_k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$[U_n \geq k]$ est réalisé	si, et seulement si,	il y a eu au moins k pannes jusqu'à l'instant n inclus
	si, et seulement si,	la k-ième panne a eu lieu au plus tard à l'instant n
	si, et seulement si,	l'évènement $[S_k \leq n]$ est réalisé

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[U_n \geq k] = [S_k \leq n]$.

Petite remarque
On pourrait assez rapidement justifier l'égalité aussi, en donnant, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, une issue réalisant l'évènement $[U_n = k]$, mais ce n'est pas nécessaire ici.

2.d.iv. En déduire que U_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

- Puisque U_n compte le nombre de pannes ayant eu lieu jusqu'à l'instant n inclus, on a déjà $U_n(\Omega) \subset [\![0; n]\!]$.
- Soit $k \in [\![0; n]\!]$. De la même façon qu'en question **1.a.i**, on a :

$$\mathbb{P}\big([U = k]\big) = \mathbb{P}\big([U \geq k]\big) - \mathbb{P}\big([U \geq k+1]\big)$$

Petite remarque
Le raisonnement a déjà été détaillé et ne fait pas l'objet de la question, on peut donc se contenter de le donner sans justification préalable.

  ⋆ Si $k = 0$: On sait déjà, d'après la question **2.d.ii** que $\mathbb{P}\big([U_n = 0]\big) = (1-p)^n$.
  ⋆ Si $k = n$: On sait déjà, d'après la question **2.d.ii** que $\mathbb{P}\big([U_n = n]\big) = p^n$.

$\star$ Si $k \in [\![1; n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U=k]) &= \mathbb{P}([U \geq k]) - \mathbb{P}([U \geq k+1]) \\
&= \mathbb{P}([S_k \leq n]) - \mathbb{P}([S_{k+1} \leq n]) && \text{question précédente, licite car } k \geq 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([S_k = i]) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) && \begin{array}{l} \forall i \in [\![1;n]\!],\ i \in S_k(\Omega) \iff \geq k \\ \forall i \in [\![1;n]\!],\ i \in S_{k+1}(\Omega) \iff \geq k+1 \\ \text{et relation de Chasles, licite car } k+1 \leq n \end{array} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}([S_k = i]) - \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} p^k (1-p)^{i-k} - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{i-k-1} && \begin{array}{l} \text{d'après la relation de Pascal :} \\ \forall i \in [\![k;n]\!],\ \binom{i-1}{k-1} = \binom{i}{k} - \binom{i-1}{k} \\ \text{(valable même si } i = k) \end{array} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \left(\binom{i}{k} - \binom{i-1}{k} \right) p^k (1-p)^{i-k} \\
&\quad - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{i-k-1} && \binom{i-1}{k} = 0 \text{ si } i = k \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} \\
&\quad - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p^k (1-p)^{i-k-1} \big((1-p) + p \big) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p^k (1-p)^{i-k-1} && j = i-1 \text{ dans la seconde somme} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} - \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $U_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p)$.

Petite remarque

De très loin la question la plus difficile de la partie I... Très certainement peu réussie au concours.

2.e. Dans cette question, le nombre p est égal à $\dfrac{1}{200}$.

On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que T. A chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

2.e.i. On note V la variable aléatoire désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant $n = 100$ inclus. Justifier que V suit la loi binomiale de paramètres 100000 et $\dfrac{1}{200}$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de $\dfrac{V-500}{\sqrt{\frac{995}{2}}}$?

- Pour tout $i \in [\![1; 1000]\!]$, on note $U_{100,i}$ le nombre de remplacements du composant i jusqu'à l'instant n inclus.
  Ainsi :
  $$V = \sum_{i=1}^{1000} U_{100,i}$$
  et, d'après la question précédente :
  $$\forall i \in [\![1; 1000]\!],\ U_{100,i} \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p)$$
  Les composants fonctionnant indépendamment les uns des autres, les variables aléatoires $U_{100,1}, \ldots, U_{100,1000}$ sont mutuellement indépendantes.
  Par conséquent, par stabilité de la loi binomiale, on a :
  $$V \hookrightarrow \mathscr{B}(1000n; p)$$
  Conclusion : V suit la loin binomiale de paramètres 100000 et $\dfrac{1}{200}$.
- La variable aléatoire V admet donc une espérance et une variance et :
  $$\mathbb{E}(V) = 500 \quad ; \quad \mathbb{V}(V) = 100000 \times \frac{1}{200} \times \left(1 - \frac{1}{200}\right) = 500 \times \frac{199}{200} = \frac{995}{2}$$

Conclusion : d'après l'approximation binomiale/normale (conséquence du théorème central limite), licite car $100000 \geq 30$, $100000 \times \dfrac{1}{200} \geq 5$ et $100000 \times \left(1 - \dfrac{1}{200}\right) \geq 5$,

Petite remarque

Il est également possible d'utiliser le TCL, mais pas sur V dans ce cas... Les hypothèses porteraient alors sur la suite $\left(U_{100,i}\right)$ et la conclusion sur la moyenne empirique centrée réduite de cette suite.

on peut approcher la loi de $\dfrac{V-500}{\sqrt{\frac{995}{2}}}$ par la loi normale centrée réduite.

2.e.ii. On désire qu'avec une probabilité de $0,95$, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus. A combien peut-on évaluer ce stock ?

On donne : $\sqrt{\dfrac{995}{2}} \times \Phi^{-1}(0,95) \simeq 37$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Notons s la valeur du stock nécessaire répondant à la question. On cherche alors s dans $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{P}\left([V \leq s]\right) = 0,95$. Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([V \leq s]\right) = 0,95 \quad & \iff \quad \mathbb{P}\left(\frac{V-500}{\sqrt{\frac{995}{2}}} \leq \frac{s-500}{\sqrt{\frac{995}{2}}}\right) = 0,95 \qquad \text{question précédente} \\
& \iff \quad \Phi\left(\frac{s-500}{\sqrt{\frac{995}{2}}}\right) = 0,95 \\
& \iff \quad \frac{s-500}{\sqrt{\frac{995}{2}}} = \Phi^{-1}(0,95) \\
& \iff \quad s = 500 + \sqrt{\frac{995}{2}} \times \Phi^{-1}(0,95) \\
& \iff \quad s \simeq 537
\end{aligned}$$

Conclusion : il faut donc prévoir un stock de 537 composants.

Partie II. Cas continu

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire de densité f_T nulle sur $]-\infty; 0[$, continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^+_*$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction F_T sur $\mathbb{R}$. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \; R_T(t) \neq 0$. Donner $R_T(0)$.

✘ Attention !

F_T n'est pas nécessaire dérivable sur $\mathbb{R}$!

- On sait que :
  - ⋆ F_T est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité
  - ⋆ F_T est nulle sur $]-\infty; 0[$ car T est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,
  - ⋆ ensuite
$$\begin{aligned}
F_T(0) &= \mathbb{P}\left([T \leq 0]\right) \qquad T \text{ est à densité} \\
&= \mathbb{P}\left([T < 0]\right) \qquad T(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \\
&= \mathbb{P}(\varnothing) \\
&= 0
\end{aligned}$$
  - ⋆ puisque f_T est continue sur $\mathbb{R}^+_*$, F_T est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+_*$ et, pour tout $t \in]0; +\infty[$:
$$F_T'(t) = f_T(t) > 0$$

✘ Attention !

f_T est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc F_T est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$: cela implique **seulement la dérivabilité à droite en 0** de F_T...

☞ Rappel...

Si une fonction f est continue sur $[a; b]$ et strictement croissante sur $]a; b]$, alors f est strictement croissante sur $[a; b]$.

D'où le tableau suivant, la limite en $+\infty$ étant immédiate puisque F_T est une fonction de répartition :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
F_T	0	$\longrightarrow$	0	$\nearrow$	1

- On a :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \; F_T(t) = 1 - F_T(t)$$
Or F_T est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_T(t) = 1$, donc :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \; F_T(t) < 1$$
D'où :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \; R_T(t) > 0$$
- Enfin :
$$\begin{aligned}
R_T(0) &= 1 - F_T(0) \qquad \text{justifcation ci-dessus pour } F_T(0) = 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. **Taux de panne.**
Pour tout réel t positif, on appelle taux de panne à l'instant t le nombre $\pi(t)$ défini par :
$$\pi(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}$$

4.a. Soit t un réel positif.
Pour tout réel strictement positif h, on note $q(t,h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t, c'est-à-dire le nombre $q(t,h)$ défini par :

$$q(t,h) = \mathbb{P}_{[T>t]}\big(T \in]t, t+h]\big)$$

4.a.i. Établir pour tout réel h strictement positif, l'égalité : $q(t,h) = \dfrac{R_T(t) - R_T(t+h)}{R_T(t)}$. Soit $h \in \mathbb{R}_*^+$.

D'après la question précédente, $\mathbb{P}\big([T > t]\big) \neq 0$, d'où :

$$\begin{aligned} q(t,h) &= \mathbb{P}_{[T>t]}\big(T \in]t, t+h]\big) \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([T > t] \cap [t < T \leq t+h]\big)}{\mathbb{P}\big([T > t]\big)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([t < T \leq t+h]\big)}{\mathbb{P}\big([T > t]\big)} \\ &= \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{R_T(t)} \\ &= \frac{1 - R_T(t+h) - \big(1 - R_T(t)\big)}{R_T(t)} \\ &= \frac{R_T(t) - R_T(t+h)}{R_T(t)} \end{aligned}$$

> **✘ Attention !**
> $\mathbb{P}\big([a < X \leq b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$, même si X n'est pas à densité ! Pas d'arguments inutiles...

Conclusion : pour tout réel h strictement positif, $q(t,h) = \dfrac{R_T(t) - R_T(t+h)}{R_T(t)}$.

4.a.ii. Montrer que la fonction R_T est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser sa fonction dérivée.
On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ R_T(t) = 1 - F_T(t)$$

Comme f_T est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, F_T est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, donc R_T est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : R_T est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $R_T'(t) = -f_T(t)$.

4.a.iii. Montrer que le rapport $\dfrac{q(t,h)}{h}$ a pour limite $\pi(t)$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures.
Soit $h > 0$ suffisamment proche de 0. On a, d'après la question **4.a.i** :

$$\begin{aligned} \frac{q(t,h)}{h} &= \frac{R_T(t) - R_T(t+h)}{hR_T(t)} \\ &= \frac{-1}{R_T(t)} \frac{R_T'(t+h) - R_T(t)}{h} \end{aligned}$$

Or R_T est dérivable en t, donc $\lim h \underset{h>0}{\to} 0 \dfrac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h} = R_T'(t) = -f_T'(t)$.
D'où :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{-1}{R_T(t)} \frac{R_T'(t+h) - R_T(t)}{h} = \frac{-1}{R_T(t)} \times (-f_T(t)) = \pi(t)$$

> **☞ Pour info...**
> Si $t > 0$, alors la limite est encore valable quand $h \underset{h<0}{\to} 0$.
> Il n'y a qu'en 0 où la limite ne peut pas être examinée par la gauche car R_T n'est pas dérivable en 0 à gauche (R_T n'est même pas définie sur $]-\infty; 0[$...).

Conclusion : $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{q(t,h)}{h} = \pi(t)$.

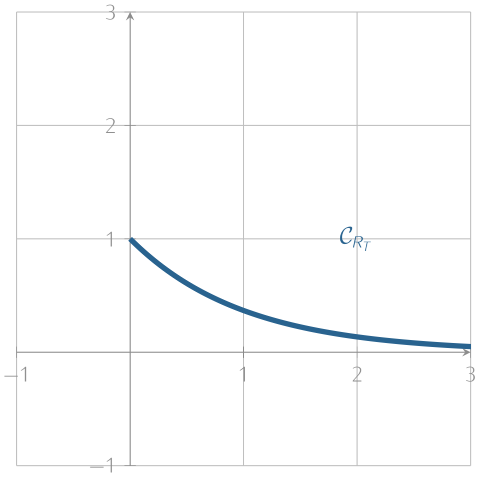
4.b. On suppose, dans cette question, que λ est un réel strictement positif et que T suit la loi exponentielle de paramètre λ.

4.b.i. Déterminer alors la fonction de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} R_T(t) &= 1 - F_T(t) \quad \text{$T \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $t \geq 0$} \\ &= 1 - \big(1 - e^{-\lambda t}\big) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

> **✘ Attention !**
> R_T n'est pas définie sur $]-\infty; 0[$...

Puis :



4.b.ii. Établir, pour tout réel t positif, l'égalité $\pi(t) = \dfrac{1}{\mathbb{E}(T)}$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \frac{f_T(t)}{R_T(t)} && \text{question précédente} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \lambda && \mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(T)} \end{aligned}$$

4.c. On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on ait : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \pi(t) = \alpha$.

4.c.i. Établir : $R_T' + \alpha R_T = 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} R_T'(t) + \alpha R_T(t) &= -f_T(t) + \pi(t) R_T(t) \\ &= -f_T(t) + \frac{f_T(t)}{R_T(t)} R_T(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $R_T' + \alpha R_T = 0$.

4.c.ii. En déduire la fonction R_T puis démontrer que T suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.

- L'équation $y' + \alpha y = 0$, d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants.
  Par conséquent, son ensemble de solutions est : $\{t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \lambda e^{-\alpha t},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Puisque R_T est solution de cette équation différentielle, il existe un réel λ, que nous considérons ensuite, tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ R_T(t) = \lambda e^{-\alpha t}$$

- Or, d'après la question 3, $R_T(0) = 1$. D'où :

$$\lambda = 1$$

Petite remarque

Je détaille cette question... On pouvait aller plus vite en se contentant de dire que, puisque R_T vérifie $y' + \alpha y = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $R_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. On poursuit ensuite comme rédigé.

Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ R_T(t) = e^{-\alpha t}$$

Et ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ F_T(t) = 1 - e^{-\alpha t}$$

Or $^T(\omega) \subset \mathbb{R}^+$, donc on sait que :

$$\forall t \in]-\infty; 0[,\ F_T(t) = 0$$

D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre α. Et la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : la variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre α.

4.d. On suppose dans cette question que la densité f_T de la variable aléatoire T est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_T(t) = \begin{cases} te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

4.d.i. Vérifier que la fonction f_T ainsi définie possède les propriétés d'une densité de probabilité.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $t < 0$: $f_T(t) = 0$
  - ⋆ Si $t \geq 0$: $f_T(t) = te^{-\frac{t^2}{2}} \geq 0$

  On a donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_T(t) \geq 0$.
- ⋆ Sur $]-\infty; 0[$: f_T est continue car constante.
  - ⋆ Sur $[0; +\infty[$: f_T est continue comme produit et composée de fonctions continues sur les intervalles adéquats.

  La fonction f_T est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 (elle est continue en 0...).
- ⋆ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_T(t)dt$ est convergente et vaut 0.
  - ⋆ L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_(t)dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$, car f est continue sur $[0; +\infty[$. Soit $B \in [0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^B f_T(t)dt &= \int_0^B te^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^B \\ &= 1 - e^{-\frac{B^2}{2}} \end{aligned}$$

    Or, par opération et composition :

$$\lim_{B \to +\infty} 1 - e^{-\frac{B^2}{2}} = 1$$

    Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_T(t)dt$ est convergente et vaut 1.

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)dt$ est convergente et vaut 1.

> **Conclusion :** f_T peut être considérée comme une densité de probabilité.

✘ Attention !
"f continue sur $]-\infty; 0[$ et continue sur $[0; +\infty[$" n'implique pas "f continue sur $\mathbb{R}$"; il peut y avoir une discontinuité en 0 par la gauche.

4.d.ii. Démontrer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Notons Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et $f_z : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ une densité de Z.

- On sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)dt$ est convergente et vaut 1. Donc, par parité de f_Z, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_Z(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

  Par conséquent : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ est convergente et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
- On sait que Z admet un moment d'ordre 2 et, par théorème de transfert (licite car $t \longmapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} t^2 f_Z(t)dt \qquad \text{parité de } t \longmapsto t^2 f_Z(t) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt \end{aligned}$$

  Or, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= \mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2 \qquad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

  D'où le résultat...

Petite remarque
Il était possible de procéder par IPP pour établir l'égalité des deux intégrales... Mais il faut de toute façon au moins un des deux arguments pour donner la valeur.

Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

4.d.iii. Justifier que T possède une espérance et la calculer.

- On sait que :

T admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)dt$ est absolument convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_T(t)dt$ est convergente, car l'intégrande est positive sur $\mathbb{R}^+$ et nulle sur $]-\infty;0[$

- Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente.
- On en déduit que T admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)dt\\ &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt && \text{question précédente}\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

Conclusion : T admet une espérance et $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4.d.iv. Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle et préciser son paramètre. En déduire la variance de la variable aléatoire T.

- Notons F_{T^2} la fonction de répartition de T^2.
  - ⋆ On a $T^2(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
  - ⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$.
    - ◇ Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}F_{T^2}(x) &= \mathbb{P}\left([T^2 \leq x]\right)\\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && x<0 \text{ et } T^2(\Omega)\subset\mathbb{R}^+\\ &= 0\end{aligned}$$

    - ◇ Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}F_{T^2}(x) &= \mathbb{P}\left([T^2 \leq x]\right)\\ &= \mathbb{P}\left([-\sqrt{x} \leq T \leq x]\right) && x \geq 0\\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_T(t)dt && T \text{ est à densité, de densité } f_T\\ &= \int_0^{\sqrt{x}} f_T(t)dt && f_T \text{ est nulle sur }]-\infty;0[\\ &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\sqrt{x}}\\ &= 1 - e^{-\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T^2}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0\\ 0 & \text{si } x < 0\end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Et la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : T^2 suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

- Du point précédent, on en déduit que T^2 admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(T^2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, T admet une variance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(T) &= \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2\\ &= 2 - \frac{\pi}{2} && \text{question précédente}\\ &= \frac{4-\pi}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : T admet une variance et $\mathbb{V}(T) = \dfrac{4-\pi}{2}$.

4.d.v. Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T. Démontrer que F_T est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$. On note F_T^{-1} la bijection réciproque de la restriction de F_T à $\mathbb{R}^+$. Déterminer, pour tout $y \in [0;1[$, l'expression de $F_T^{-1}(y)$ en fonction de y.

- D'après les calculs menés dans les questions précédentes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Ainsi :
  - ⋆ F_T est continue sur $\mathbb{R}^+$,
  - ⋆ F_T est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (directement, ou car F_T est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^+$).

  Par théorème de bijection, F_T est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $F_T(\mathbb{R}^+)$. Or F_T est croissante, donc $F_T(\mathbb{R}^+) = [F_T(0); \lim\limits_{x\to+\infty} F_T(x)[$.

Conclusion : F_T est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$.

- Soient $y \in [0;1[$ et $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned}
F_T(x) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = y && \text{car } x \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - y && 1 - y > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 = -2\ln(1-y) && 1 - y \leq 1, \text{ donc } -2\ln(1-y) \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\sqrt{-2\ln(1-y)} \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{-2\ln(1-y)} \end{cases} && x \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{-2\ln(1-y)}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $y \in [0;1[$, $F_T^{-1}(y) = \sqrt{-2\ln(1-y)}$.

☞ Rappel...
Par définition :
$$x = F_T^{-1}(y) \iff y = F_T(x)$$

♡ Astuce du chef ! ♡
On rappelle qu'une fonction g est bijective de E dans F si, et seulement si : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E \ /\ y = g(x)$.
Ainsi, la résolution de l'équation $F_T(x) = y$ peut aussi servir à démontrer que F_T est bijective... (c'est d'ailleurs comme cela que nous faisions avant de connaître le théorème de bijection...).
En revanche, il faut bien vérifier à la fin que la solution trouvée appartient à l'ensemble voulu. Ici, il suffit de dire que $\sqrt{-2\ln(1-y)} \geq 0$...

★ Classique ! ★
Question classique : méthode dite d'inversion pour simuler des variables aléatoires...

4.d.vi. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = F_T^{-1}(U)$. En déduire une fonction **Python** d'en-tête `simulT()` permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire T.

- Considérons que $U(\Omega) = [0;1[$. Notons F_V la fonction de répartition de V.
  - ⋆ On a :

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= F_T^{-1}\big(U(\Omega)\big) \\
&= F_T^{-1}\big([0;1[\big) && F_T \text{ est bijective de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } [0;1[\\
&= \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

  - ⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$.
    - ◇ Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}
F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leq x]\big) && x < 0 \text{ et } V(\Omega) = \mathbb{R}^+ \\
&= \mathbb{P}(\varnothing) \\
&= 0
\end{aligned}$$

    - ◇ Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leq x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([F_T^{-1}(U) \leq x]\big) && F_T \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } x \geq 0 \\
&= \mathbb{P}\big([U \leq F_T(x)]\big) \\
&= F_U\big(F_T(x)\big) && F_T(x) \in [0;1[\text{ et } U \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0;1[\big) \\
&= F_T(x)
\end{aligned}$$

    Puisque F_T est nulle sur $]-\infty;0[$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = F_T(x)$$

Conclusion : V suit la même loi que T.

- On propose ainsi, en utilisant le résultat précédent et celui de la question précédente, le programme suivant :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulT():
    u=rd.random()
    v=np.sqrt(-2*np.log(1-u))
    return v
```

4.d.vii. En utilisant le résultat de la question 4.d.v, donner la fonction de survie du composant puis l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et le point d'inflexion. On donne : $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,607$.

On a immédiatement :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ R_T(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- R_T est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$R_T'(t) = -t e^{-\frac{t^2}{2}} \quad ; \quad R_T''(t) = -(1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

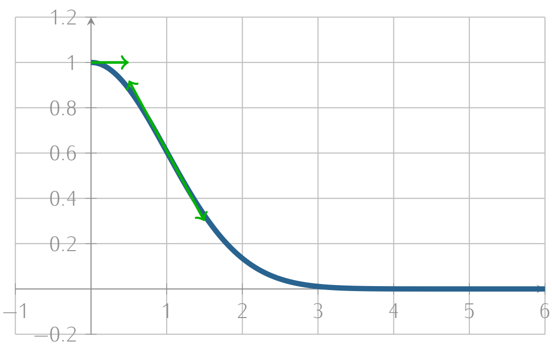
D'où :

t	0		1		$+\infty$
$R_T''(t)$		$-$	0	$+$	
R_T		concave		convexe	

La courbe de la fonction R_T admet donc un point d'inflexion en le point de coordonnées $(1, e^{-\frac{1}{2}})$. Et :

t	0		$+\infty$
$R_T'(t)$	0	$-$	
R_T	1	$\searrow$	0

- D'où :



4.d.viii. Calculer, pour tout réel t positif, le taux de panne $\pi(t)$. Commenter.

- Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \frac{f_T(t)}{R_T(t)} \quad \text{question 4.d.vii} \\ &= \frac{t e^{-\frac{t^2}{2}}}{e^{-\frac{t^2}{2}}} \\ &= t \end{aligned}$$

- Le taux de panne augmente donc avec le temps : on est dans une situation d'usure du matériau.

☞ Pour info...
- Taux de panne décroissant : situation de rodage.
- Taux de panne constant : situation sans vieillissement.
- Taux de panne croissant : situation d'usure.

5. Entretien préventif.

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.
On suppose que la variable aléatoire T admet une espérance (nécessairement strictement positive) notée $\mathbb{E}(T)$ et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.
On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût C, et que son remplacement a un coût K, C et K étant deux constantes strictement positives.
Une première méthode d'entretien consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par : $c_1 = \dfrac{K+C}{\mathbb{E}(T)}$.
Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel θ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à θ, sinon à le remplacer

préventivement au bout d'une durée θ de fonctionnement.
On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de θ par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + \big(1 - R_T(\theta)\big)C}{\displaystyle\int_0^\theta R_T(t)dt}$$

5.a. **5.a.i.** Établir :

$$\forall \theta > 0, \ \int_0^\theta R_T(t)dt = \theta \mathbb{P}\big([T > \theta]\big) + \int_0^\theta t f_T(t)dt$$

Soit $\theta > 0$. Posons : $\left| \begin{array}{l} u : t \longmapsto R_T(t) \\ v : t \longmapsto t \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0; \theta]$ (question **4.a.i**) et pour tout $t \in [0; \theta]$: $\left| \begin{array}{l} u'(t) = R_T'(t) \\ v'(t) = 1 \end{array} \right.$.
Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\theta R_T(t)dt &= \big[tR_T(t)\big]_0^\theta - \int_0^\theta tR_T'(t)dt \qquad R_T = -f_T \\ &= \theta R_T(\theta) + \int_0^\theta tf_T(t)dt \\ &= \theta \mathbb{P}\big([T > \theta]\big) + \int_0^\theta tf_T(t)dt \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall \theta > 0, \ \displaystyle\int_0^\theta R_T(t)dt = \theta \mathbb{P}\big([T > \theta]\big) + \int_0^\theta tf_T(t)dt.$

> **★ Classique ! ★**
> On commence à bien connaître cette question et la suivantes, très classiques, qui permettent d'obtenir une autre expression de l'espérance d'une variable aléatoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$...

5.a.ii. Démontrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_T(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_T(t)dt = \mathbb{E}(T)$.

On vient d'établir :

$$\forall \theta > 0, \ \int_0^\theta R_T(t)dt = \theta \mathbb{P}\big([T > \theta]\big) + \int_0^\theta t f_T(t)dt$$

Justifions le passage à la limite quand $\theta \to +\infty$ dans cette égalité...

- D'une part, T admet une espérance, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_T(t)dt$ est convergente.
  Et comme $T(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, on a :
  $$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} tf_T(t)dt$$
- D'autre part :
  - ⋆ Soit $\theta > 0$. On a :
    $$\begin{aligned} \theta \mathbb{P}\big([T \geq \theta]\big) &= \theta \int_\theta^{+\infty} f_T(t)dt \\ &= \int_\theta^{+\infty} \theta f_T(t)dt \end{aligned}$$
    Or , par positivité de f_T :
    $$\forall t \geq \theta, \ \theta f_T(t) \leq tf_T(t)$$
    D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $\theta > 0$ donc les deux intégrales en jeu sont convergentes :
    $$\int_\theta^{+\infty} \theta f_T(t)dt \leq \int_\theta^{+\infty} tf_T(t)dt$$
  - ⋆ On a ainsi :
    $$\forall \theta > 0, \ 0 \leq \int_\theta^{+\infty} \theta f_T(t)dt \leq \int_\theta^{+\infty} tf_T(t)dt$$
    Autrement dit, par relation de Chasles, licite car $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_T(t)dt$ est convergente :
    $$\forall \theta > 0, \ 0 \leq \int_\theta^{+\infty} \theta f_T(t)dt \leq \int_0^{+\infty} tf_T(t)dt - \int_0^\theta tf_T(t)dt$$
    Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_T(t)dt$ est convergente, on en déduit :
    $$\lim_{\theta \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} tf_T(t)dt - \int_0^\theta tf_T(t)dt \right) = 0$$
    Ainsi, par théorème d'encadrement :
    $$\lim_{\theta \to +\infty} \int_\theta^{+\infty} \theta f_T(t)dt = 0$$

  Nous avons ainsi établi :
  $$\lim_{\theta \to +\infty} \theta \mathbb{P}\big([T > \theta]\big) = 0$$

Conclusion : en passant à la limite quand $\theta \to +\infty$ dans l'égalité de la relation précédente, on obtient que l'intégrale $\int_0^{+\infty} R_T(t)dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} R_T(t)dt = \mathbb{E}(T)$.

5.a.iii. Vérifier : $\lim\limits_{\theta\to+\infty} c_2(\theta) = c_1$.

Immédiat, d'après la question précédente et le fait que $\lim\limits_{\theta\to+\infty} R_T(\theta) = 0$...

5.b. Calculer c_1 et, pour tout réel θ strictement positif, $c_2(\theta)$ dans le cas où T suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

Dans ce cas :

- $c_1 = \lambda(K + C)$
- pour tout $\theta > 0$:

$$\begin{aligned} c_2(\theta) &= \frac{K + \big(1 - R_T(\theta)\big)C}{\displaystyle\int_0^\theta R_T(t)dt} \\ &= \lambda\frac{K + (1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta})C}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta}} \\ &= \lambda\left(\frac{K}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta}} + C\right) \end{aligned}$$

- Puisque $\lambda\theta > 0$, on obtient rapidement : $c_2(\theta) > c_1$.
Le coût préventif n'est pas intéressant dans ce cas là ; ceci est dû au caractère sans vieillissement de la loi exponentielle.

Interprétation

Le cas $\theta \to +\infty$ revient à ne pas se fixer d'entretien préventif. Il est alors normal que le coût soit égal au coût de la première méthode. Il est important de vérifier la cohérence de ces éléments lors d'une modélisation.
Notons également que plus $\mathbb{E}(T)$ est grand, plus c_1 est petit. En effet, c_1 ne représente pas le coût du remplacement, seulement sont coût par unité de temps...
En pratique, ce qui est intéressant n'est pas le coût de remplacement brut, mais le coût relatif au nombre de remplacements attendus : parfois, il vaut mieux que le composant soit plus cher et donc plus couteux à remplacer, mais plus fiable...

5.c. On suppose que T suit la loi décrite dans la question **4.d**.

5.c.i. Préciser la valeur de c_1.

D'après la question **4.d.iii**, on trouve : $c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(K + C)$.

5.c.ii. Pour tout réel strictement positif θ, on pose : $\varphi(\theta) = C\displaystyle\int_0^\theta \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\theta}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right)$.

Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et que sa dérivée est strictement positive. En déduire le tableau de variations de φ.

- Puisque $t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\theta \longmapsto \displaystyle\int_0^\theta \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
On en déduit ensuite que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) &= C\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\theta^2}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right) - \frac{C}{\theta}\theta\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} \\ &= C\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\theta^2}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right) - C\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\theta^2}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Puisque $1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}} > 0$, on en déduit :

$$\varphi'(\theta) > 0$$

- Par opérations, et puisque $K > 0$, on trouve :

$$\lim_{\theta\to0} \varphi(\theta) = -\infty$$

Par opérations et d'après la question **4.d.ii**, on trouve :

$$\lim_{\theta\to+\infty} \varphi(\theta) = C\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

D'où :

θ	0	$+\infty$
$\varphi'(\theta)$	‖	$+$
φ	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $C\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

✍ Rédaction

A ce stade du sujet, on peut aller nettement plus vite ici.
En rédigeant ainsi, on démontre au correcteur :
• que l'on ne manque pas de rigueur, en pensant à justifier la dérivabilité d'une fonction avant de la dériver,
• que l'on a saisi l'essentiel de la justification, le reste étant classique et ayant déjà été mentionné dans des questions précédentes,
• que l'on connaît son cours.

5.c.iii. Etudier les variations de la fonction c_2 et montrer qu'elle admet un minimum en un unique réel θ_0 qui vérifie : $c_2(\theta_0) < c_1$. Interpréter ce résultat dans le contexte décrit en début de question **5**.

- Commençons par déterminer c_2...
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} c_2(\theta) &= \frac{K + \big(1 - R_T(\theta)\big)C}{\displaystyle\int_0^\theta R_T(t)dt} \\ &= \frac{K + \big(1 - e^{-\frac{t^2}{2}}\big)C}{\displaystyle\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt} \end{aligned}$$

question **4.d.vii**

Ainsi, c_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$ (en effet, par stricte positivité de $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$, on a : $\forall \theta \in \mathbb{R}_*^+$, $\displaystyle\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt > 0$).
Et, pour tout $\theta \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} c_2'(\theta) &= \frac{C\theta e^{-\frac{\theta^2}{2}} \displaystyle\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\left(K + C\big(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\big)\right)}{\left(\displaystyle\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)^2} \\ &= \varphi(\theta)\frac{Ce^{-\frac{\theta^2}{2}}}{\left(\displaystyle\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)^2} \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{Ce^{-\frac{\theta^2}{2}}}{\left(\displaystyle\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)^2} > 0$, on en déduit que $c_2(\theta)$ a le même signe de $\varphi(\theta)$.

- Or, d'après la question précédente :
  - ⋆ φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$,
  - ⋆ φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Par théorème de bijection, φ est donc bijective de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\varphi(\mathbb{R}_*^+) = \left]-\infty; \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right[$.

Puisque $0 \in \left]-\infty; \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right[$, il existe un unique réel θ_0 tel que $\varphi(\theta_0)$. Et puisque φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient :

$$\forall \theta \in]0; \theta_0[, \;\; \varphi(\theta) < 0 \quad ; \quad \forall \theta \in]\theta_0, +\infty[, \;\; \varphi(\theta) > 0$$

D'où le tableau de variations de c_2 :

θ	0		θ_0		$+\infty$
$c_2'(\theta)$	‖	$-$	0	$+$	
c_2	‖ ...	↘	$c_2(\theta_0)$	↗	c_1

Petite remarque
On trouve $\lim\limits_{\theta \to 0} c_2(\theta) = +\infty$ (valable dans le cas général et cohérent avec l'interprétation...).

Conclusion : la fonction c_2 admet un minimum atteint en un unique réel, θ.

- Par stricte croissance de c_2 sur $[\theta_0; +\infty[$ et comme $\lim\limits_{\theta \to +\infty} c_2(\theta) = c_1$, on a :

$$c_2(\theta_0) < c_1$$

- Pour cette modélisation de durée de vie, il existe donc une durée θ_0 telle qu'en effectuant un entretien préventif au bout de θ_0 unités de temps, le coût de remplacement par unité de temps soit moindre que le coût de remplacement obtenu en attendant la panne du composant.

5.c.iv. Établir l'égalité $c_2(\theta_0) = C\theta_0$ puis l'inégalité $\theta_0 < \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(1 + \dfrac{K}{C}\right)$.

- L'égalité découle de la définition de c_2 et du fait que $\varphi(\theta_0) = 0$...
- L'inégalité découle de l'égalité et du fait que $c_2(\theta_0) < wc_1$ et de la valeur de c_1...

♡ L'avis du chef ! ♡
Question pas très intéressante pour finir... J'aurais préféré terminé sur l'interprétation de la précédente.

Partie III. Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0, t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.
On notera en particulier que pour $s \le t$, on a $N_s \le N_t$.
On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

P1. $N_0 = 0$ et $0 < \mathbb{P}\big([N_t = 0]\big) < 1$ pour tout $t > 0$.

P2. Pour tous réels $t_0, t_1, \dots, t_n$ tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants).

P3. Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires).

P4. $\displaystyle\lim_{h \to 0, h>0} \frac{\mathbb{P}\big([N_h > 1]\big)}{h} = 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geq 0$ et pour tout s dans $[0,1]$, $G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u})$, avec la convention $0^0 = 1$.

6. **6.a.** Justifier que pour tout $u \geq 0$, $G_u(s)$ existe pour tout s dans $[0,1]$ et qu'on a, pour tout $s \in [0,1]$:

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_u = k]\big) s^k$$

6.b. Montrer par ailleurs que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leq s \leq 1$, on a :

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s)$$

7. On fixe s tel que $0 \leq s \leq 1$.

7.a. Montrer que $G_1(s) > 0$.
On pose $\theta(s) = -\ln\big(G_1(s)\big)$ et, pour $u \geq 0$, $\psi_s(u) = G_u(s)$.

7.b. Montrer que $\psi_s(k) = \mathrm{e}^{-k\theta(s)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

7.c. Soit q un entier naturel non nul. En considérant $G_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer que $\psi_s\left(\dfrac{1}{q}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

7.d. Montrer que si p est entier naturel et q un entier naturel non nul, on a $\psi_s(r) = \mathrm{e}^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \dfrac{p}{q}$.

7.e. Soit $u \in \mathbb{R}^+$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n}$ et $R_n = \dfrac{\lfloor nu \rfloor + 1}{n}$.

7.e.i. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n \leq u \leq R_n$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \psi_s(r_n) \leq \psi_s(u) \leq \psi_s(R_n)$.

7.e.ii. Démontrer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} r_n = \lim_{n \to +\infty} R_n = u$.

7.e.iii. Conclure : $G_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

7.f. En déduire que $\displaystyle\lim_{h \to 0, h>0} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

8. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_h(s) - 1 = \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)(s^k - 1)$$

9. **9.a.** Montrer que pour tout $s \in [0,1]$: $\displaystyle\lim_{h \to 0, h>0} \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)(s^k - 1)}{h} = 0$.

9.b. En déduire qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha = \displaystyle\lim_{h \to 0, h>0} \frac{\mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0,1]$:

$$\theta(s) = \alpha(1-s)$$

9.c. En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

9.d. On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_u = k]\big) s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right) s^k$$

9.e. Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.
Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t \geq 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante α s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

10. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$.
Comparer les événements $[T > t]$ et $[N_t = 0]$.
En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

11. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\widetilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

11.a. Montrer que $\widetilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

11.b. Montrer que la famille $(\widetilde{N}_h)_{h \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

11.c. En déduire que la première panne survenant après la date t se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre α.

11.d. En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date t donnée, le taux de panne du système après t est constant.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★