# Concours blanc 2 - Épreuve 2

Jeudi 7 mars - 4h00

---

*La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.*

*Quelques précisions :*

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

*L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.*
*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

"*Vieillir ensemble, ce n'est pas ajouter des années à la vie, mais de la vie aux années.*"
Jacques Salomé

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire $T$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Sous réserve d'existence, on notera $\mathbb{E}(T)$ son espérance.

On notera $F_T$ la fonction de répartition de cette variable aléatoire et on appelle *fonction de survie* du composant la fonction $R_T$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \; R_T(t) = 1 - F_T(t)$$

Le problème se compose de trois parties pouvant être traitées indépendamment.

# Partie I. Cas discret

On suppose dans cette partie que $T$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel $n$, $R_T(n) \neq 0$.

1. **Taux de panne.**
   Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on appelle *taux de panne* à l'instant $n$ du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant $n$, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre $\pi_n$ défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{[T>n-1]}\big([T = n]\big)$$

1.a. 1.a.i. Exprimer, pour tout entier naturel non nul $n$, la probabilité $\mathbb{P}\big([T = n]\big)$ à l'aide de la fonction $R_T$. En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{R_T(n-1) - R_T(n)}{R_T(n-1)}$$

1.a.ii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 0 \leq \pi_n < 1$$

ainsi que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; R_T(n) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \pi_k)$$

1.a.iii. Justifier que pour tout entier naturel non nul $n$, on a $\pi_n = \mathbb{P}_{[T\geq n]}\big([T = n]\big)$. *Cette expression permet de définir le taux de panne à l'instant 0.* Calculer $\pi_0$.

1.b. Soit $p \in ]0, 1[$. On suppose que $T$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.

1.b.i. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $T$ ?

1.b.ii. Calculer, pour tout entier naturel $n$, $R_T(n)$ en fonction de $n$.

1.b.iii. En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

1.c. Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif $\alpha$ tel que l'on ait : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \pi_n = \alpha$.

1.c.i. Établir, pour tout entier naturel non nul $n$, l'égalité : $R_T(n) = (1 - \alpha)^n$.

1.c.ii. En déduire que $T$ suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

1.d. Que conclure des questions 1.b et 1.c ?

2. **Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.**
   Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.
   On considère à nouveau dans cette partie, que $p$ est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et on suppose que $T$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ et que, pour tout entier strictement positif $i$, la durée de vie du $i$-ème composant est une variable aléatoire $T_i$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi que $T$.

   Les variables aléatoires $T_i$ sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel $k$ non nul, on pose : $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$.

   *La variable aléatoire $S_k$ désigne donc l'instant où se produit la $k$-ième panne et le $k$-ième remplacement.*

2.a. Soit $m$ un entier naturel. Démontrer par récurrence sur $n$, pour tout entier naturel $n$ vérifiant $n \geq m$, l'égalité : $\sum\limits_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

2.b. 2.b.i. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_2$ égale à $T_1 + T_2$.

2.b.ii. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\forall n \in [\![k; +\infty[\![, \; \mathbb{P}\big([S_k = n]\big) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

2.c. 2.c.i. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulS(k,p)`, qui prend en arguments d'entrée un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et un réel $p \in ]0; 1[$, puis qui simule l'expérience et renvoie une réalisation de $S_k$.

2.c.ii. De quelle valeur l'exécution du programme suivant fournit-elle une valeur approchée ? Justifier en mentionnant soigneusement le théorème utilisé.

```python
L=[simulS(10,0.2) for k in range(1000)]
print(sum(L)/len(L))
```

2.d. Soit $n$ un entier strictement positif. On note $U_n$ la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant $n$ inclus.

2.d.i. Que permet de simuler la fonction **Python** suivante ? Justifier soigneusement la réponse.

```python
import numpy.random as rd

def mystere(n,p):
    S=rd.geometric(p)
    nb=0
    while S<=n:
        nb=nb+1
        S=S+rd.geometric(p)
    return nb
```

2.d.ii. Établir l'égalité $\mathbb{P}\big([U_n = 0]\big) = (1-p)^n$ et calculer $\mathbb{P}\big([U_n = n]\big)$.

2.d.iii. Exprimer, pour tout entier naturel non nul $k$, l'événement $[U_n \geq k]$ à l'aide d'un événement faisant intervenir la variable aléatoire $S_k$.

2.d.iv. En déduire que $U_n$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

2.e. Dans cette question, le nombre $p$ est égal à $\dfrac{1}{200}$.
On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que $T$. A chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

2.e.i. On note $V$ la variable aléatoire désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant $n = 100$ inclus. Justifier que $V$ suit la loi binomiale de paramètres 100000 et $\dfrac{1}{200}$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de $\dfrac{V-500}{\sqrt{\frac{995}{2}}}$ ?

2.e.ii. On désire qu'avec une probabilité de 0,95, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant $n$ égal à 100 inclus. A combien peut-on évaluer ce stock ?
On donne : $\sqrt{\dfrac{995}{2}} \times \Phi^{-1}(0,95) \simeq 37$, où $\Phi$ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

# Partie II. Cas continu

On suppose dans cette partie que $T$ est une variable aléatoire de densité $f_T$ nulle sur $]-\infty;0[$, continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^+_*$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction $F_T$ sur $\mathbb{R}$. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ R_T(t) \neq 0$. Donner $R_T(0)$.

4. **Taux de panne.**
Pour tout réel $t$ positif, on appelle taux de panne à l'instant $t$ le nombre $\pi(t)$ défini par :
$$\pi(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}$$

4.a. Soit $t$ un réel positif.
Pour tout réel strictement positif $h$, on note $q(t,h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants $t$ et $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $t$, c'est-à-dire le nombre $q(t,h)$ défini par :
$$q(t,h) = \mathbb{P}_{[T>t]}\big(T \in ]t, t+h]\big)$$

4.a.i. Établir pour tout réel $h$ strictement positif, l'égalité : $q(t,h) = \dfrac{R_T(t) - R_T(t+h)}{R_T(t)}$.

4.a.ii. Montrer que la fonction $R_T$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser sa fonction dérivée.

4.a.iii. Montrer que le rapport $\dfrac{q(t,h)}{h}$ a pour limite $\pi(t)$ quand $h$ tend vers 0 par valeurs supérieures.

4.b. On suppose, dans cette question, que $\lambda$ est un réel strictement positif et que $T$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

4.b.i. Déterminer alors la fonction de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.

4.b.ii. Établir, pour tout réel $t$ positif, l'égalité $\pi(t) = \dfrac{1}{\mathbb{E}(T)}$.

4.c. On suppose dans cette question qu'il existe une constante $\alpha$ strictement positive telle que l'on ait : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \pi(t) = \alpha$.

4.c.i. Établir : $R_T' + \alpha R_T = 0$.

4.c.ii. En déduire la fonction $R_T$ puis démontrer que $T$ suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.

4.d. On suppose dans cette question que la densité $f_T$ de la variable aléatoire $T$ est définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_T(t) = \begin{cases} t e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

4.d.i. Vérifier que la fonction $f_T$ ainsi définie possède les propriétés d'une densité de probabilité.

4.d.ii. Démontrer :
$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

4.d.iii. Justifier que $T$ possède une espérance et la calculer.

4.d.iv. Montrer que la variable aléatoire $T^2$ suit une loi exponentielle et préciser son paramètre. En déduire la variance de la variable aléatoire $T$.

4.d.v. Déterminer la fonction de répartition $F_T$ de la variable aléatoire $T$. Démontrer que $F_T$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$. On note $F_T^{-1}$ la bijection réciproque de la restriction de $F_T$ à $\mathbb{R}^+$. Déterminer, pour tout $y \in [0;1[$, l'expression de $F_T^{-1}(y)$ en fonction de $y$.

4.d.vi. Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = F_T^{-1}(U)$. En déduire une fonction **Python** d'en-tête `simulT()` permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire $T$.

4.d.vii. En utilisant le résultat de la question 4.d.v, donner la fonction de survie du composant puis l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et le point d'inflexion. On donne : $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,607$.

4.d.viii. Calculer, pour tout réel $t$ positif, le taux de panne $\pi(t)$. Commenter.

5. **Entretien préventif.**

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.

On suppose que la variable aléatoire $T$ admet une espérance (nécessairement strictement positive) notée $\mathbb{E}(T)$ et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût $C$, et que son remplacement a un coût $K$, $C$ et $K$ étant deux constantes strictement positives.

Une première méthode d'entretien consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par : $c_1 = \dfrac{K+C}{\mathbb{E}(T)}$.

Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel $\theta$ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à $\theta$, sinon à le remplacer préventivement au bout d'une durée $\theta$ de fonctionnement.

On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de $\theta$ par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + \big(1 - R_T(\theta)\big)C}{\displaystyle\int_0^\theta R_T(t)dt}$$

5.a. 5.a.i. Établir :

$$\forall \theta > 0, \ \int_0^\theta R_T(t)dt = \theta \mathbb{P}\big([T > \theta]\big) + \int_0^\theta t f_T(t)dt$$

5.a.ii. Démontrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_T(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_T(t)dt = \mathbb{E}(T)$.

5.a.iii. Vérifier : $\displaystyle\lim_{\theta\to+\infty} c_2(\theta) = c_1$.

5.b. Calculer $c_1$ et, pour tout réel $\theta$ strictement positif, $c_2(\theta)$ dans le cas où $T$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

5.c. On suppose que $T$ suit la loi décrite dans la question 4.d.

5.c.i. Préciser la valeur de $c_1$.

5.c.ii. Pour tout réel strictement positif $\theta$, on pose : $\varphi(\theta) = C\displaystyle\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\theta}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right)$.
Montrer que la fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et que sa dérivée est strictement positive. En déduire le tableau de variations de $\varphi$.

5.c.iii. Etudier les variations de la fonction $c_2$ et montrer qu'elle admet un minimum en un unique réel $\theta_0$ qui vérifie : $c_2(\theta_0) < c_1$. Interpréter ce résultat dans le contexte décrit en début de question 5.

5.c.iv. Établir l'égalité $c_2(\theta_0) = C\theta_0$ puis l'inégalité $\theta_0 < \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(1 + \dfrac{K}{C}\right)$.

# Partie III. Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel $t$ positif, la variable aléatoire $N_t$ à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0,t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.

On notera en particulier que pour $s \leq t$, on a $N_s \leq N_t$.

On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

P1. $N_0 = 0$ et $0 < \mathbb{P}\big([N_t = 0]\big) < 1$ pour tout $t > 0$.

P2. Pour tous réels $t_0, t_1, \dots, t_n$ tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants).

P3. Pour tous réels $s$ et $t$ tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que $N_{t-s}$ (accroissements stationnaires).

P4. $\displaystyle\lim_{h\to0, h>0} \frac{\mathbb{P}\big([N_h > 1]\big)}{h} = 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geq 0$ et pour tout $s$ dans [0,1], $G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u})$, avec la convention $0^0 = 1$.

6. 6.a. Justifier que pour tout $u \geq 0$, $G_u(s)$ existe pour tout $s$ dans [0,1] et qu'on a, pour tout $s \in [0,1]$ :

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_u = k]\big)s^k$$

**6.b.** Montrer par ailleurs que, pour tous réels $u$ et $v$ positifs ou nuls, et pour tout réel $s$ tel que $0 \leq s \leq 1$, on a :

$$G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$$

**7.** On fixe $s$ tel que $0 \leq s \leq 1$.

**7.a.** Montrer que $G_1(s) > 0$.
On pose $\theta(s) = -\ln\big(G_1(s)\big)$ et, pour $u \geq 0$, $\psi_s(u) = G_u(s)$.

**7.b.** Montrer que $\psi_s(k) = \mathrm{e}^{-k\theta(s)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**7.c.** Soit $q$ un entier naturel non nul. En considérant $G_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer que $\psi_s\left(\dfrac{1}{q}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

**7.d.** Montrer que si $p$ est entier naturel et $q$ un entier naturel non nul, on a $\psi_s(r) = \mathrm{e}^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \dfrac{p}{q}$.

**7.e.** Soit $u \in \mathbb{R}^+$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n}$ et $R_n = \dfrac{\lfloor nu \rfloor + 1}{n}$.

**7.e.i.** Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n \leq u \leq R_n$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \psi_s(r_n) \leq \psi_s(u) \leq \psi_s(R_n)$.

**7.e.ii.** Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} R_n = u$.

**7.e.iii.** Conclure : $G_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

**7.f.** En déduire que $\lim\limits_{h\to 0, h>0} \dfrac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

**8.** Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_h(s) - 1 = \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)(s^k - 1)$$

**9.** **9.a.** Montrer que pour tout $s \in [0,1]$ : $\lim\limits_{h\to 0, h>0} \dfrac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)(s^k - 1)}{h} = 0$.

**9.b.** En déduire qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{h\to 0, h>0} \dfrac{\mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0,1]$ :

$$\theta(s) = \alpha(1-s)$$

**9.c.** En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

**9.d.** On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_u = k]\big)s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\alpha u}\frac{(\alpha u)^k}{k!}\right)s^k$$

**9.e.** Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire $N_u$ suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha u$.
Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t\geq 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante $\alpha$ s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

**10.** Soit $T$ la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$.
Comparer les événements $[T > t]$ et $[N_t = 0]$.
En déduire que $T$ suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha$.

**11.** Pour $t$ positif fixé, on pose pour $h$ réel positif, $\widetilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

**11.a.** Montrer que $\widetilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

**11.b.** Montrer que la famille $(\widetilde{N}_h)_{h\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre $\alpha$.

**11.c.** En déduire que la première panne survenant après la date $t$ se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre $\alpha$.

**11.d.** En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date $t$ donnée, le taux de panne du système après $t$ est constant.

---

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★