
La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Vous n'avez pas besoin d'être constamment le meilleur, vous avez simplement à l'être au bon moment."
Olivier Lockert

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...

Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✗ Attention !

Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

EXERCICE 1 (FAIT MAISON)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2xy$.

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

2. Démontrer que f possède trois points critiques : $(0; 0)$, $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\partial_1 f(x, y) = 4x^3 - 2x + 2y \quad ; \quad \partial_2 f(x, y) = 4y^3 - 2y + 2x$$

• Ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0_{2,1} &\iff \begin{cases} 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\ 4y^3 - 2y + 2x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\ 4y^3 - 2y + 2x = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\ 4x^3 + 4y^3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\ y^3 = -x^3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\ y^3 = (-x)^3 \end{cases} \quad \text{injectivité de la fonction cube} \\ &\iff \begin{cases} 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\ y = -x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ y = -x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x(x^2 - 1) = 0 \\ y = -x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \\ \text{ou} \\ (x, y) = (1, -1) \\ \text{ou} \\ (x, y) = (-1, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Important !
La résolution doit bien évidemment être détaillée. En particulier, on doit voir l'information $y = -x$ et injecter cela dans l'autre équation pour obtenir une équation à une inconnue !

Conclusion : f possède trois points critiques : $(0; 0)$, $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

3. 3.a. Écrire la hessienne de f en chaque point critique.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 12x^2 - 2 \quad ; \quad \partial_{1,2}^2 f(x, y) = 2 = \partial_{2,1}^2 f(x, y) \quad ; \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = 12y^2 - 2$$

• Ainsi :

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2 f(1, -1) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2 f(-1, 1) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Petite remarque
On peut mentionner le théorème de Schwarz, puisque f est \mathcal{C}^2 .

3.b. Montrer que f possède un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum. Quelle information les valeurs propres de la hessienne en le troisième point critique nous permettent elles d'obtenir ?

• En $(1, -1)$:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (\lambda \text{ est valeur propre de } \nabla^2 f(1, -1)) &\iff (\nabla^2 f(1, -1) - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible}) \\ &\iff \det \begin{pmatrix} 10 - \lambda & 2 \\ 2 & 10 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (10 - \lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \begin{cases} 10 - \lambda = 2 \\ \text{ou} \\ 10 - \lambda = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = 8 \\ \text{ou} \\ \lambda = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(\nabla^2 f(1, -1)) = \{8; 12\}$, la matrice $\nabla^2 f(1, -1)$ a ainsi deux valeurs propres strictement positives.

Conclusion : f admet un minimum local en $(1, -1)$, égal à $f(1, -1) = -2$.

- En $(-1, 1)$:
Puisque $\nabla^2 f(1, -1) = \nabla^2 f(-1, 1)$, la conclusion est identique.

Conclusion : f admet un minimum local en $(-1, 1)$, égal à $f(-1, 1) = -2$.

- En $(0, 0)$:
De la même façon, on trouve : $\text{Sp}(\nabla^2 f(0, 0)) = \{0; -4\}$. La matrice $\nabla^2 f(1, -1)$ possède une valeur propre nulle, on ne peut donc pas conclure quant à l'existence d'un extremum local en $(0, 0)$.

Conclusion : puisque $\nabla^2 f(0, 0)$ possède une valeur propre nulle et une valeur propre négative, f peut admettre un point col en $(0, 0)$ ou un maximum local, mais pas un minimum local.

3.c. Etudier les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ lorsque x est au voisinage de 0. Conclure quant à la nature du troisième point critique de f .

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x, x) = 2x^4 ; \quad f(x, -x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$$

- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x, x) > 0$.
- Pour x suffisamment proche de 0, différent de 0 ($x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{0\}$), on a :

$$f(x, -x) < 0$$

Or $f(0, 0) = 0$. Ainsi, pour tout x au voisinage de 0 (0 exclu), on a :

$$f(x, -x) < f(0, 0) < f(x, x)$$

Conclusion : f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$, il s'agit d'un point col en ce point.

4. 4.a. Compléter l'égalité suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) + 2 = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + \dots$

Sans mal, on trouve :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) + 2 = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (x + y)^2$$

4.b. Que peut-on conclure quant au minimum de f ?

D'après la question précédente :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (x + y)^2 - 2$$

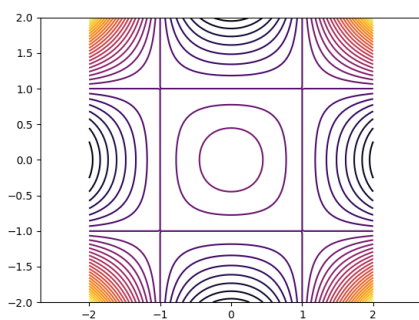
Et on rappelle que $f(1, -1) = f(-1, 1) = -2$. Ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq f(1, -1)$$

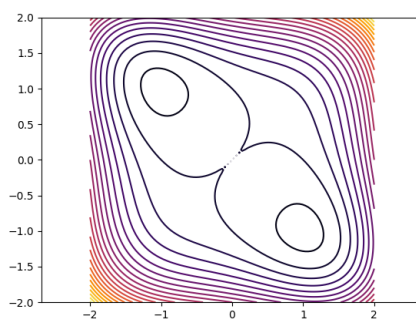
Conclusion : f possède un minimum global égal à -2 , atteint seulement en $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

5. Parmi les trois graphiques ci-dessous, lequel représente des lignes de niveaux de f sur $[-2; 2] \times [-2; 2]$?

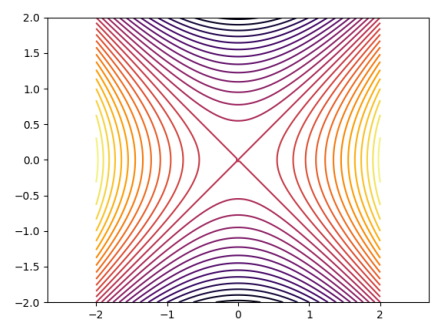
Justifier la réponse.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Il s'agit du graphique 2.

En effet :

- le graphique 1 n'a pas de point col en $(0, 0)$, les lignes de niveaux indiquent plutôt un minimum ou un maximum (ou un point en lequel f ne serait pas définie...);
- le graphique 3 présente un point col en $(0, 0)$, mais pas d'extremum en $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

Petite remarque

On peut aussi écrire :
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 0^+$ et
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x) = 0^-$, mais les
signes sont indispensables !

★ Subtile... ★

Il faut les inégalités strictes pour conclure... même si des inégalités larges permettraient probablement d'obtenir tous les points.

Petite remarque

On peut bien affirmer cela, car si f atteignait ce minimum ailleurs sur \mathbb{R}^2 , qui est un ouvert, f admettrait un point critique en cet autre point. Cela aurait pu être différent si on avait étudié f sur un fermé borné...

EXERCICE 2 (HEC 2013 E)

On note $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de E .

On définit l'application f sur E qui à toute fonction polynomiale $P \in E$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = -3xP(x) + x^2P'(x)$$

1. 1.a. Montrer que f est une application linéaire.

Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons : $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$. Autrement dit, montrons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(x) &= -3x(\lambda P + \mu Q)(x) + x^2(\lambda P + \mu Q)'(x) \\ &= -3x\lambda P(x) + \lambda x^2 P'(x) - 3x\mu Q(x) + \mu x^2 Q'(x) \quad \leftarrow \text{linéarité de la dérivation et de l'évaluation en } x \\ &= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x) \end{aligned}$$

Par conséquent : $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Conclusion : f est une application linéaire.

Confusion d'objets !

$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ est une égalité de fonctions !

1.b. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Expliciter, pour tout réel x , $f(P)(x)$ et en déduire que f est un endomorphisme de E .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= -3x(ax^3 + bx^2 + cx + d) + x^2(3ax^2 + 2bx + c) \\ &= -3ax^4 - 3bx^3 - 3cx^2 - 3dx + 3ax^4 + 2bx^3 + cx^2 \\ &= -bx^3 - 2cx^2 - 3dx \end{aligned}$$

Par conséquent : $f(P)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Ainsi : $f(P) \in E$.

Conclusion : on a ainsi démontré : $\forall P \in E, f(P) \in E$.

f est donc, d'après la question précédente, un endomorphisme de E .

1.c. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E .

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(P_0)(x) = -3x; f(P_1)(x) = -2x^2; f(P_2)(x) = -x^3; f(P_3)(x) = 0$$

Ainsi :

$$f(P_0) = -3P_1; f(P_1) = -2P_2; f(P_2) = -P_3; f(P_3) = 0$$

D'où :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est scandaleux !

Comment peut-on ne pas traiter cette question et la suivante ?!

Important !

On veut voir ces égalités, ce sont elles qui permettent de compléter la matrice !

1.d. La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*, M^n$.

- La matrice M est triangulaire avec au moins un coefficient diagonal nul.

Conclusion : M n'est pas inversible.

- Puisque M est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc M possède une unique valeur propre : 0.

Raisonnons par l'absurde et supposons que M soit diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que :

$$\star D \text{ est composée des valeurs propres de } M, \text{ donc } D = 0_4;$$

$$\star M = PDP^{-1}.$$

Ainsi : $M = 0_4$. D'où l'absurdité.

Conclusion : M n'est pas diagonalisable.

- On a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; M^4 = 0_4$$

et ainsi :

$$\forall n \geq 4, M^n = 0_4$$

1.e. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

- Puisque (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de E , on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)) \\ &= \text{Vect}(-3P_1, -2P_2, -P_3) \\ &= \text{Vect}(P_1, P_2, P_3) \end{aligned}$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est ainsi :

- * génératrice de $\text{Im}(f)$ par définition,
- * libre car échelonnée en degrés (ou car sous-famille d'une famille libre, en l'occurrence sous famille de la base canonique).

Conclusion : la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\text{Im}(f)$.

On en déduit : $\text{rg}(f) = 3$.

- Par théorème du rang, on en déduit : $\dim(\ker(f)) = 1$.
Et on sait que $f(P_3) = 0$. Ainsi, la famille (P_3) est une famille de $\ker(f)$ qui est :
 - * libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
 - * telle que $\text{Card}((P_3)) = 1 = \dim(\ker(f))$.

Conclusion : la famille (P_3) est une base de $\ker(f)$.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E , et pour tout endomorphisme v de E , on pose $v^0 = \text{id}_E$ et pour tout k de \mathbb{N}^* , $v^k = v \circ v^{k-1}$.

Soient u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$.

- 2.a. Calculer $g \circ (\text{id}_E - u)$. Qu'en déduire sur g ?

On a :

$$\begin{aligned} g \circ (\text{id}_E - u) &= g - g \circ u \\ &= \text{id}_E + u + u^2 + u^3 - (\text{id}_E + u + u^2 + u^3) \circ u \\ &= \text{id}_E + u + u^2 + u^3 - (u - u^2 - u^3 - u^4) \quad \leftarrow u^4 = 0_E \\ &= \text{id}_E \end{aligned}$$

Conclusion : l'endomorphisme g est bijectif et $g^{-1} = \text{id}_E - u$.

- 2.b. Soit $P \in E$ tel que $P \notin \ker(u^3)$. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est une base de E .

- Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supposons $aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = 0$ et notons (*) cette égalité.

- * En appliquant u^3 , par linéarité de u^3 et puisque $\forall k \geq 4, u^k = 0_E$, on obtient :

$$au^3(P) = 0$$

Or $P \notin \ker(u^3)$, donc $u^3(P) \neq 0$. D'où :

$$a = 0$$

- * Ainsi, (*) devient $bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = 0$.

En appliquant u^2 , on obtient alors :

$$bu^3(P) = 0$$

Or $u^3(P) \neq 0$. D'où :

$$b = 0$$

- * Ainsi, (*) devient $cu^2(P) + du^3(P) = 0$.

En appliquant u , on obtient de la même façon :

$$c = 0$$

- * Ainsi, (*) devient $du^3(P) = 0$.

Or $u^3(P) \neq 0$. D'où :

$$d = 0$$

La famille \mathcal{B}' est donc libre.

- Et $\text{Card}(\mathcal{B}') = 4 = \dim(E)$.

Conclusion : \mathcal{B}' est une base de E .

- 2.c. Déterminer la matrice de g dans la base \mathcal{B}' .

Puisque $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$ et que $u^4 = 0_E$, on obtient :

- $g(P) = P + u(P) + u^2(P) + u^3(P)$,
- $g(u(P)) = u(P) + u^2(P) + u^3(P)$,
- $g(u^2(P)) = u^2(P) + u^3(P)$,
- $g(u^3(P)) = u^3(P)$.

D'où :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Petite remarque

- Bien évidemment, on peut travailler matriciellement pour obtenir $\text{Im}(M)$ et $\ker(M)$... Mais il faut alors impérativement conclure sur les bons objets pour $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$.
- On voulait voir (P_1, P_2, P_3) , et pas $(-3P_1, -2P_2, -P_3)$.

Quelle horreur...

"Trois vecteurs non colinéaires" : ça n'a aucun sens !! Et "2 à 2 non colinéaires" ne permet absolument pas d'affirmer la liberté !

Petite remarque

La notation 0_E est assez malvenue, car en principe utilisée pour désigner le vecteur nul de E , et pas l'endomorphisme nul de E .

♥ Astuce du chef ! ♥

On pense à l'égalité ci-dessous, ci $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$... autrement dit : $(1-x)(1+x+x^2+x^3) = 1-x^4$. En évaluant en l'endomorphisme u , on retrouve bien le résultat donné.

★ Classique ! ★

Classique, essentiellement en TOP3, mais pourquoi pas en TOP5.

EXERCICE 3 (ÉCRICOME 2023 E)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n . On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k , on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, j boules numérotées j , jusqu'à k boules numérotées k . Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

- L'expérience consiste à tirer au hasard et de manière **équiprobable** une boule dans une urne composée de n boules numérotées de 1 à n .
- La variable aléatoire X prend comme valeur le numéro de la boule obtenue.

Conclusion : X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ et ainsi : $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{n}$

X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

Montrons que $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

\subset Au moment du second tirage, l'urne est composée d'un certain nombre de boules, toutes numérotées de 1 à n .

Puisque Y prend comme valeur le numéro de la boule obtenue, on a : $Y(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$.

\supset Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrons que $j \in Y(\Omega)$, autrement dit, montrons : $\exists \omega \in \Omega / Y(\omega) = j$.

Notons ω l'issue consistant à :

- * tirer la boule numéro n lors du premier tirage ; la seconde urne est ainsi composée de 1 boules numéro 1, 2 boules numéro 2, ..., n boules numéro n ;
- * puis tirer une boule numérotée j .

Cette issue réalise l'évènement $[Y = j]$. Ainsi $j \in Y(\Omega)$.

D'où : $\llbracket 1; n \rrbracket \subset Y(\Omega)$.

Conclusion : $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Petite remarque

Il suffit de tirer la boule j au premier tirage pour avoir des chances de la tirer au second... En revanche, tirer une boule de numéro strictement inférieur à j au premier tirage ne permettra pas de tirer une boule j au second.

Important !

Le résultat n'étant pas donné, fournir simplement $Y(\Omega)$ sans justifier rapporte des points. Il est toutefois important d'avoir la méthode en tête pour ce type de questions.

3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

3.a. On suppose l'évènement $[X = k]$ réalisé. Déterminer, en fonction de k , le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.

Puisque l'évènement $[X = k]$ est réalisé, au moment du tirage, la seconde urne est composée de :

- 1 boule numérotée 1,
- 2 boules numérotées 2,
- ...
- k boules numérotées k .

Ainsi, l'urne est composée de $\sum_{i=1}^k i$ boules.

Conclusion : si l'évènement $[X = k]$ est réalisé, alors la seconde urne comporte $\frac{k(k+1)}{2}$ boules.

3.b. Pour tout entier j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $\mathbb{P}_{[X=k]}(\{Y = j\})$ en fonction de k et j . On distinguera les cas $j \leq k$ ou $j \geq k + 1$.

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Commençons déjà par remarquer que, puisque $X \hookrightarrow \mathcal{Z}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, on a $\mathbb{P}(\{X = k\}) \neq 0$.

Ensuite, supposons l'évènement $[X = k]$ réalisé.

Dans ce cas, la seconde urne est composée de : 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., k boules numérotées k .

- si $j \geq k + 1$:
Le second tirage ne peut pas fournir de boule dont le numéro est strictement supérieur à k .
Ainsi :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}(\{Y = j\}) = 0$$

- Si $j \leq k$:
L'évènement $[Y = j]$ est réalisé si, et seulement si, on pioche une des j boules numérotées j dans la seconde urne composée (question précédente) de $\frac{k(k+1)}{2}$ boules.

Par **équiprobabilité du choix des boules**, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X=k]}(\{Y = j\}) &= \frac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} \\ &= \frac{2j}{k(k+1)} \end{aligned}$$

✖ Attention !

Il faudra être attentif plus tard (très bientôt) quand on remplacera $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j])$ dans une somme pour la FPT (classique !!). Et on l'utilisera sous la forme :
 $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) = \begin{cases} \frac{2j}{k(k+1)} & \text{si } k \geq j \\ 0 & \text{si } k \leq j-1 \end{cases}$

$$\text{Conclusion : } \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}[X = k]([Y = j]) = \begin{cases} \frac{2j}{k(k+1)} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j \geq k+1 \end{cases}$$

4. 4.a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

On remarque :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\text{Conclusion : on prend } a = 1 \text{ et } b = -1. \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

4.b. En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([Y = j]) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ comme système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = j]) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) && \hookrightarrow \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0 \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{n} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) + \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) && \hookrightarrow \text{question 3.b} \\ &= \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} \frac{2j}{k(k+1)} \\ &= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)} && \hookrightarrow \text{question précédente} \\ &= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) && \hookrightarrow \text{linéarité de la somme et télescopage} \\ &= \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{n} - \frac{2j}{n(n+1)} \\ &= \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : pour tout élément } j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([Y = j]) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

5. Justifier que Y admet une espérance et démontrer : $\mathbb{E}(Y) = \frac{n+2}{3}$.

Puisque $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ est fini, Y admet une espérance, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}([Y = j]) && \hookrightarrow \text{question précédente} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{2(n+1)j}{n(n+1)} - \frac{2j^2}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n j - \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n+1 - \frac{2n+1}{3} \\ &= \frac{3(n+1) - (2n+1)}{3} \\ &= \frac{n+2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } Y \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y) = \frac{n+2}{3}$$

6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

♣ Méthode !

L'énoncé de la question 7.b nous donne la réponse : puisque $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, ce qui guide la méthode...
 DEVOIR SURVEILLÉ 6 - Page 7/17
 Retourner voir Chapitre 2 -

- Remarquons que l'évènement $[X = 1] \cap [Y = 2]$ est vide.
En effet, il est impossible d'obtenir à la fois la boule 1 au premier tirage, d'effectuer alors le second tirage dans une urne composée uniquement d'une boule numérotée 1, et d'y obtenir une boule numérotée 2.

Ainsi :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = 0$$

- Or :

$$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{n} \neq 0 ; \mathbb{P}([Y = 2]) = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \neq 0 \quad n \geq 2$$

D'où :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \neq \mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 2])$$

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

7. 7.a. Démontrer : $\mathbb{E}(XY) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}$.

Puisque X et Y sont des variables aléatoires finies, c'est également le cas de XY . Ainsi, la variable aléatoire XY admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{(k,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} kj \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} kj \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} kj \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) \quad \left. \begin{array}{l} \text{question 3.b} \\ \end{array} \right\} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} kj \frac{1}{n} \frac{2j}{k(k+1)} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{j^2}{k+1} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{k+1} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^k j^2 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k(2k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n (2k^2 + k) \\ &= \frac{1}{3n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{9} + \frac{n+1}{6} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1) + 3(n+1)}{18} \\ &= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(XY) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}$.

7.b. En déduire : $\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{18}$.

Les variables aléatoires X et Y sont finies, donc elles admettent un moment d'ordre 2, et donc le couple (X, Y) admet une covariance.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2} \frac{n+2}{3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{questions 1, 5, 7.a} \\ \end{array} \right\} \\ &= \frac{(n+1)(4n+5) - 3(n+1)(n+2)}{18} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{18} \\ &= \frac{n^2 - 1}{18} \end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{18}$.

Rappel...

De façon générale, il suffit que X et Y admettent un moment d'ordre 2 (c'est le cas ici, car elles sont finies) pour que XY admette une espérance.

Rappel...

Un couple discret admet toujours une covariance, mais de façon générale, c'est l'existence des moments d'ordre 2 qui garantit l'existence de la covariance.

8. 8.a. Écrire une fonction en langage **Python**, nommée `seconde_urne`, prenant en entrée un entier naturel k non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant 1, 2 éléments valant 2, ..., j éléments valant j , ..., jusqu'à k éléments valant k .
Par exemple, l'appel de `seconde_urne(4)` renverra `[1,2,2,3,3,3,4,4,4,4]`.

```

1 def seconde_urne(k):
2     L=[]
3     for j in range(1,k+1):
4         L=L+j*[j]
5     return L

```

Rappel...

Si a est un entier naturel et L une liste, alors la commande $a*L$ renvoie la concaténation de a fois la liste L .

- 8.b. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction en langage **Python** suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel n non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires (X, Y) .

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def simul_XY(n):
4     X=...
5     urne2=seconde_urne(...)
6     nb=len(urne2)
7     i=rd.randint(0,nb)
8     Y=...
9     return X,Y

```

Le programme complet :

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def simul_XY(n):
4     X=rd.randint(1,n+1)
5     urne2=seconde_urne(X)
6     nb=len(urne2)
7     i=rd.randint(0,nb)
8     Y=urne2[i]
9     return X,Y

```

Rappel...

Au concours, inutile de réécrire le programme en entier, seules les lignes à compléter suffisent.

Explication

On choisit un élément au hasard de la liste `urne2` en choisissant un entier au hasard entre 0 et `len(urne2)-1` (se souvenir de l'indexation d'une liste en **Python**).

- 8.c. On considère la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier naturel n non nul.

```

1 def fonction(n):
2     liste=[0]*n
3     for i in range(10000):
4         j=simu_XY(n)[1]
5         liste[j-1]=liste[j-1]+1/10000
6     return liste

```

Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

- Des lignes 3 à 5, on répète 10000 fois les mêmes commandes :
 - * simuler le couple (X, Y) avec la fonction suivante, et stocker la valeur de Y obtenue dans la variable j ,
 - * j prend alors une valeur dans $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$,
 - * on ajoute $1/10000$ au j -ème élément de la liste `liste`.

A la fin des 10000 répétitions, la liste `liste` contient n réels, noté f_1, f_2, \dots, f_n où, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f_j est la fréquence d'apparition de l'évènement $[Y = j]$ sur les 10000 réalisations de Y .

- Formellement : en considérant Y_1, \dots, Y_{10000} des variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que Y (autrement dit, (Y_1, \dots, Y_{10000}) est un échantillon de Y), puisque Y admet une espérance et une variance, par conséquence de la loi faible des grands nombres :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, f_j \simeq \mathbb{P}(Y = j)$$

Conclusion : la liste `liste` permet d'obtenir une approximation de la loi de probabilité de Y ; autrement dit, les valeurs de la liste `liste` sont, dans l'ordre, des valeurs approchées de $\mathbb{P}(Y = 1), \dots, \mathbb{P}(Y = n)$.

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$. On simule 50 réalisations du couple de variables aléatoires (X, Y) à l'aide de la fonction `simul_XY` définie à la question 8.b. On représente alors les valeurs obtenues sous forme d'un nuage de points, où les valeurs des réalisations de X sont représentées en abscisse et les valeurs des réalisations de Y en ordonnée. On trace également, sur la même figure, la droite de régression linéaire associée à ce nuage de points.

9.a. Déterminer par un calcul une valeur approchée des coordonnées du point moyen du nuage de points. Quel théorème de probabilités permet de justifier cette approximation ?

- Par définition, le point moyen du nuage de points est le point de coordonnées $(\bar{x}_{50}, \bar{y}_{50})$, où \bar{x}_{50} et \bar{y}_{50} sont respectivement les moyennes des 50 observations x_1, \dots, x_{50} et y_1, \dots, y_{50} obtenues. Autrement dit :

$$\bar{x}_{50} = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} x_k ; \bar{y}_{50} = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} y_k$$

- Or, d'après la loi faible des grands nombres (licite car les observations sont indépendantes, donc on obtient bien un échantillon des variables aléatoires X et Y ; ces deux variables aléatoires admettant une espérance et une variance), pour n suffisamment grand, une réalisation de la moyenne empirique fournit une bonne approximation de l'espérance. Ainsi :

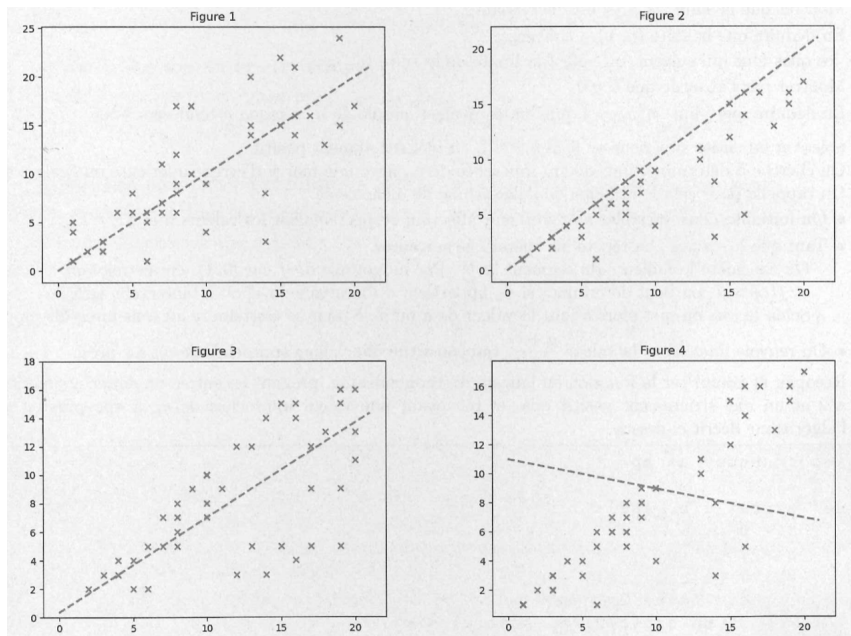
$$\bar{x}_{50} \simeq \mathbb{E}(X) ; \bar{y}_{50} \simeq \mathbb{E}(Y)$$

- Enfin, avec $n = 20$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{21}{2} ; \mathbb{E}(Y) = \frac{22}{3}$$

Conclusion : les coordonnées du point moyen sont approximativement $\left(\frac{21}{2}, \frac{22}{3}\right)$.

9.b. Parmi les figures représentées ci-dessous, en justifiant soigneusement votre réponse, indiquer celle qui correspond au nuage de points et à la droite de régression linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés étudiés.



- On sait que le coefficient directeur de la droite de régression linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés est de même signe que la covariance. Puisque $\text{Cov}(X, Y) = \frac{20^2 - 1}{18} > 0$, il ne peut s'agir de la figure 4 (surtout que la droite estime bien mal le nuage de points, quelle idée !!).
- La figure 1 fait apparaître des valeurs de Y supérieures à 20... Or $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$... On exclut donc la figure 1.
- La droite tracée en figure 2 n'est pas du tout la droite de régression linéaire du nuage de points correspondant (là encore, quelle idée !!)... De surcroît, elle ne passe pas par le point moyen dont les coordonnées sont approximativement $(10, 5; 7, 3)$: il n'y a pas de tel point.

Conclusion : il s'agit de la figure 3.

Petite remarque
On peut tout de même déplorer la qualité des propositions 2 et 4, qui n'ont aucun sens ; on peut les éliminer même sans argument lié à l'exercice. Mais que font les concepteurs ?!

2. 2.a. Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x]\right) && \left. \begin{array}{l} \hookrightarrow X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ \hookrightarrow X_1, \dots, X_n \text{ suivent toutes la même loi que } V \end{array} \right. \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k \leq x]) \\ &= F_V(x)^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases} && \left. \begin{array}{l} \hookrightarrow V \leftrightarrow \mathcal{E}(1) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Rédaction

Bien évidemment, on peut également commencer par dire que $Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, et donc, si $x < 0$, alors $\mathbb{P}([Y_n \leq x]) = 0$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2.b. En déduire que Y_n est à densité et en donner une densité f_{Y_n} .

On sait déjà que F_{Y_n} est une fonction de répartition... De surcroît :

- * F_{Y_n} est continue sur $] -\infty; 0[$, car constante sur cet intervalle ;
- * F_{Y_n} est continue sur $]0; +\infty[$, par composée de fonctions continues sur les intervalles adéquats ;
- * $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_{Y_n}(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_{Y_n}(x)$ (car $n > 0$) et donc F_{Y_n} est continue en 0.

F_{Y_n} est continue sur \mathbb{R} .

- par des arguments similaires, F_{Y_n} est \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, elle est donc \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

Par conséquent, Y_n est une variable aléatoire à densité et on en obtient une densité f_{Y_n} en :

▷ dérivant F_{Y_n} sur les intervalles ouverts :

$$\forall x \in] -\infty; 0[, f_{Y_n}(x) = 0 ; \quad \forall x \in]0; +\infty[, f_{Y_n}(x) = ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}$$

▷ posant $f_{Y_n}(0) = 0$.

Conclusion : Y_n est à densité et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Pour info...

En fait, F_{Y_n} est \mathcal{C}^1 en 0...

Astuce du chef !

Ici, la densité est continue en 0; mais, de façon générale, je conseille toutefois de poser la valeur qui permet d'inclure la borne d'intervalle sur lequel la densité est non nulle... C'est souvent plus commode pour la suite.

3.

3.a. Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))dt$ est convergente.

- On a : $\forall t \in \mathbb{R}^+, 1 - F_{Y_n}(t) = 1 - (1 - e^{-t})^n$. Or :

$$\star (1 + u)^n = 1 + nu + o(u)$$

$$\star \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t}) = 0$$

D'où :

$$(1 - e^{-t})^n = 1 - ne^{-t} + o(e^{-t})$$

Et ainsi :

$$1 - F_{Y_n}(t) = ne^{-t} + o(e^{-t})$$

Par conséquent, puisque $n \neq 0$:

$$1 - F_{Y_n}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ne^{-t}$$

- Commençons déjà par remarquer que, puisque la fonction $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))dt$ est seulement impropre en $+\infty$. Ensuite, on sait que :

$$\star 1 - F_{Y_n}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ne^{-t},$$

$$\star \forall t \in \mathbb{R}^+, 1 - F_{Y_n}(t) \geq 0, ne^{-t} \geq 0,$$

- l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale convergente (intégrale d'une densité de loi exponentielle de paramètre 1).

Par critère d'équivalence sur les intégrales à intégrandes positives, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))dt \text{ est convergente.}$$

Classique !

L'enchaînement des questions 3.a à 3.c est un grand classique visant à établir une expression de l'espérance d'une variable aléatoire à densité à partir de sa fonction de répartition. A travailler autant que nécessaire !

Petite remarque

On peut également utiliser l'équivalent usuel :

$$(1 + u)^n - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} nu$$

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$ est convergente.

3.b. Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

Posons : $\begin{cases} u : t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t) \\ v : t \mapsto t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur le segment $[0; x]$ (F_{Y_n} est bien \mathcal{C}^1 en 0, par la droite (elle l'est même en 0...)) et pour tout $t \in [0; x]$: $\begin{cases} u'(t) = -f_{Y_n}(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt &= [t(1 - F_{Y_n}(t))]_0^x + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt \\ &= x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$.

3.c. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

D'après la question 3.a :

$$x(1 - F_{Y_n}(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} n x e^{-x}$$

Or, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

3.d. En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$$

• On sait que :

Y_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt$ est absolument convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt$ est absolument convergente, car f_{Y_n} est nulle sur $]-\infty; 0[$

si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt$ est convergente, car l'intégrande est positive sur $[0; +\infty[$

• Or, d'après les questions 3.a, 3.b et 3.c, on a :

$$\star \forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt = \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt - x(1 - F_{Y_n}(x)),$$

\star l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$ est convergente,

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x t f_{Y_n}(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt$ est convergente.

• On en déduit que Y_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt \end{aligned}$$

Conclusion : Y_n possède une espérance et $\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$.

→ **Réflexe !**

On garde les bons réflexes de rédaction habituels ; puis on fait le lien avec ce qui précède. Cette question est la dernière de la question 3, il est normal d'utiliser au moins le résultat précédent...

4. 4.a. Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u} du$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

Effectuons le changement de variable $u = 1 - e^{-t}$:

$$\left| \begin{array}{l} u = 1 - e^{-t} \\ t = -\ln(1-u) \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} du = e^{-t} dt \\ dt = \frac{1}{1-u} du \end{array} \right. ; \begin{array}{|c|c|c|} \hline t = & 0 & x \\ \hline u = & 0 & 1 - e^{-x} \\ \hline \end{array}$$

Ce changement de variable est bien licite, puisque la fonction $u \mapsto -\ln(1-u)$ est \mathcal{C}^1 sur $]0; 1 - e^{-x}[$, car $x \geq 0$, donc $e^{-x} \in]0; 1[$ et ainsi $1 - e^{-x} \in]0; 1[$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt &= \int_0^x (1 - (1 - e^{-t})^n) dt \\ &= \int_0^{1-e^{-x}} (1 - u^n) \frac{1}{1-u} du \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u} du.$

★Subtile...★

Si on pose $u = g(t)$, g doit être bijective et c'est la fonction g^{-1} qui doit être \mathcal{C}^1 ...
Pour ne pas se tromper, on devrait toujours poser $t = \dots$ même si c'est parfois moins naturel !

4.b. En déduire que : $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

• Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt &= \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u} du \\ &= \int_0^{1-e^{-x}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k \right) du \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de l'intégrale} \\ \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, k \neq -1 \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1-e^{-x}} u^k du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^{1-e^{-x}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1 - e^{-x})^{k+1}}{k+1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{changement d'indice } j = k+1 \end{array} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^{j+1}}{j+1} \end{aligned}$$

• Puis, par opération :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x})^k = 1$$

D'où (la somme étant finie) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1}$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Conclusion : d'après la question 3.d, on obtient $\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

5. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

5.a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_*^+ , donc sur $[n; n+1]$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $n \leq n+1$, et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[n; n+1]$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

5.b. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers un même réel, noté γ .

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \quad \curvearrowright \text{question précédente} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= h_{n+1} - \ln(n+2) - (h_n - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \quad \curvearrowright \text{question précédente : } \ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$$

On a ainsi :

- * $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante
- * $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante
- * $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0$

Par conséquent, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Conclusion : les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite, notée γ .

✎ Pour info...

γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.

5.c. Démontrer finalement : $\mathbb{E}(Y_n) = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

D'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma$$

D'où :

$$u_n = \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

Et ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

Conclusion : d'après la question 4.b, on obtient $\mathbb{E}(Y_n) = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

6. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

6.a. Écrire une fonction **Python** de sorte que, pour tout entier naturel non nul n , l'exécution de `simulZ(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z_n .

```

1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3
4 def simulZ(n):
5     L=[rd.exponential(1) for k in range(n)]
6     Y=max(L)
7     Z=Y-np.log(n)
8     return Z

```

6.b. Voici deux scripts :

```

1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 V=[rd.exponential(1) for k in range(10000)]
6 W=np.log(V)
7 x=[k for k in range(0,11)]
8 plt.hist(W,x,density=True,edgecolor='k')
9 plt.show()

```

Script (1)

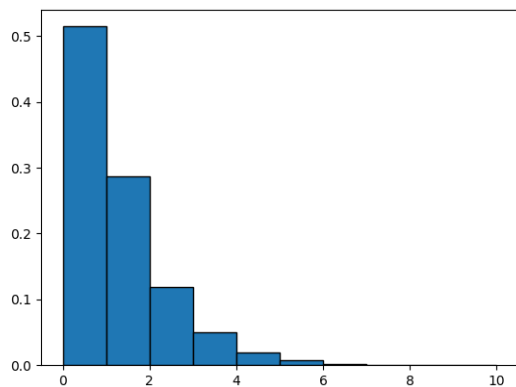
```

1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 n=int(input('n=?'))
6 L=[simulZ(n) for k in range(10000)]
7 x=[k for k in range(0,11)]
8 plt.hist(L,x,density=True,edgecolor='k')
9 plt.show()

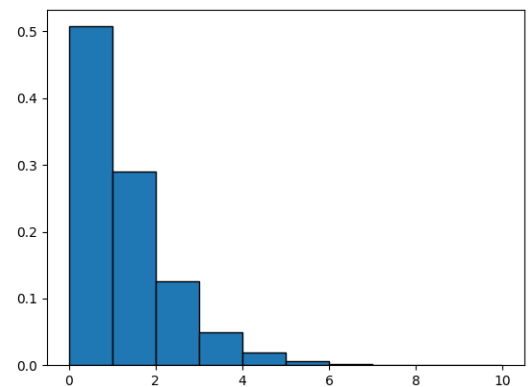
```

Script (2)

Le script (1) renvoie l'histogramme (1) et le script (2) renvoie l'histogramme (2) après avoir pris $n = 100$.



Histogramme (1)



Histogramme (2)

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
arg1

7. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n .

7.a. Justifier que, pour tout réel x , on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}([Z_n \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([Y_n - \ln(n) \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([Y_n \leq x + \ln(n)]) \\
 &= F_{Y_n}(x + \ln(n))
 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout réel x , on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

7.b. Déterminer explicitement, pour tout réel x , $F_{Z_n}(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 F_{Z_n}(x) &= F_{Y_n}(x + \ln(n)) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x + \ln(n) < 0 \\ (1 - e^{-(x + \ln(n))^n}) & \text{si } x + \ln(n) \geq 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{question 2.a} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geq -\ln(n) \end{cases}
 \end{aligned}$$

♣ **Méthode !**

Pas nécessaire de procéder séparément les deux cas au préalable, on peut se contenter de remplacer "bêtement" x par $x + \ln(n)$...

7.c. Montrer que, pour tout réel x , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

- $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$
- $\frac{e^{-x}}{n} \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x}}{n} = 0$

Donc :

$$\ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-e^{-x}}{n}$$

Ainsi :

$$n \ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-x}$$

Conclusion : pour tout réel x , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) = -e^{-x}$.

7.d. Démontrer le résultat conjecturé à la question 5.b.

Démontrons que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W .

Puisque F_W est continue sur \mathbb{R} , nous devons établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(n) = -\infty$, il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, x > -\ln(n)$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)^n \\ &= \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) \right) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pour } n \text{ suffisamment grand, } 1 - \frac{e^{-x}}{n} > 0 \end{array} \right\}$$

Or, d'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) = -e^{-x}$.

D'où, par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) \right) = e^{-e^{-x}}$$

On a ainsi établi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

Conclusion : la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W . Le résultat conjecturé en question 5.b est donc établi.

♣ Méthode !

On quantifie le x en lien avec la fonction de répartition de la loi limite... Et dans tous les cas, **jamais de disjonctions de cas dépendant de n si l'on passe ensuite à la limite quand $n \rightarrow +\infty$.** Revoir les exemples du chapitre 11 si besoin.

Petite remarque

$n_0 = \lceil e^{-x} \rceil + 1$ convient.

★★★★★★ FIN ★★★★★★