Recueil de questions...

Mélange de démonstrations de cours et de questions classiques

Ce document regroupe quelques démonstrations de résultats qu'il est bon de travailler en vue des concours. Ces questions peuvent être de deux natures :

- démonstration d'un résultat de cours (indiquée par ♥),
- démonstration d'un résultat classique aux écrits ou aux oraux (indiquée par ♠ s'il faut savoir la faire sans indication ou par ♣ si elle serait guidée).

Bien évidemment, il ne faut pas apprendre ces démonstrations... Il faut les travailler, les comprendre : l'objectif étant d'être en mesure de savoir les refaire ou de les adapter à des situations similaires.

Un conseil pour les travailler : pour chacune, résumer les étapes essentielles de la démonstration et les noter. Il faut ensuite se souvenir de ces étapes et être en mesure de gérer en autonomie ce qui se situe entre deux étapes consécutives.

Cette liste est non exhaustive et ne fait que compléter le travail des méthodes et exercices classiques au programme.

Liste des questions classiques

1 ♥ Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

> ☞ **Rappel...**
> Dans sa version matricielle, il est indispensable que les matrices A et B commutent pour l'utiliser.

⋆ Démonstration : Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  D'une part :
  $$(a+b)^0 = 1$$
  et d'autre part :
  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} &= \binom{0}{0} a^0 b^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$
  L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ et montrons que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$.
  On a :
  $$\begin{aligned}
  (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
  &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
  &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{changement d'indice } i = k+1 \text{ dans la première somme} \\
  &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-(i-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{relation de Chasles, licite car } n \geq 0 \text{ (les deux sommes sont indexées sur un ensemble vide, donc nulles, si } n = 0) \\
  &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1} \\
  &= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} && \text{relation de Pascal} \\
  &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} && \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1} \text{ et } \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \\
  &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
  &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
  \end{aligned}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

- **Conclusion :** par récurrence, on a ainsi démontré : $\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

⋆

2 ♥ Théorème de divergence monotone en $+\infty$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** et **non majorée**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

> ☞ **Rappels...**
> - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée :
> $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
> - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$: $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![n_0; +\infty[\![,\ u_n \geq M$

⋆ Démonstration : Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée. On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n \quad ; \quad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ u_{n_0} > M$$

Montrons :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![n_0; +\infty[\![,\ u_n \geq M$$

Soit $M \in \mathbb{R}$.
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée par M, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$. Notons n_0 un tel entier.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on obtient, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![,\ u_n \geq u_{n_0}$$

D'où le résultat.

⋆

3 ♥ Majoration d'une suite croissante et convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** et **converge vers un réel ℓ**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ.

⋆ Démonstration : Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers un réel ℓ. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ.
Raisonnons par l'absurde. Supposons alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée par ℓ ; autrement dit, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \ell$. Notons n_0 un tel entier.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on obtient, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![, \; u_n \geq u_{n_0}$$

Puis, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ sur cette inégalité, on obtient :

$$\ell \geq u_{n_0}$$

D'où la contradiction.
Par conséquent : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ. ⋆

☞ Rappel...
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée par ℓ :
$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq \ell$

4 ♥ Critères de comparaison sur les séries à terme général positif

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

Q1# Si $\begin{cases} \boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq u_n \leq v_n} \\ \boldsymbol{\sum v_n} \textbf{ est convergente} \end{cases}$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Q2# Si $\begin{cases} \boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq u_n \leq v_n} \\ \boldsymbol{\sum u_n} \textbf{ est divergente} \end{cases}$, alors la série $\sum v_n$ est divergente.

Petite remarque
Ces critères sont encore valables si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang...

⋆ Démonstration : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Q1# Supposons : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum v_n \text{ est convergente} \end{cases}$. Montrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= u_{n+1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

  La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; u_k \leq v_k$$

  D'où, en sommant de 0 à n :

$$U_n \leq V_n$$

  Mais, de façon analogue au point précédent, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; et elle est convergente, puisque $\sum v_n$ est convergente. Par conséquent, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par sa limite, égale à $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
  Par transitivité, on obtient :

$$U_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

  La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.

Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Autrement dit, la série $\sum u_n$ est convergente.

♣ L'idée !
On montre que $\sum u_n$ est convergente en montrant, via le théorème de convergence monotone, que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q2# Supposons : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum u_n \text{ est divergente} \end{cases}$.

- On sait que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (comme Q1).
  Ainsi, par théorème de limite monotone, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite en $+\infty$.
  Mais $\sum u_n$ est divergente, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc également divergente.
  Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

- Mais, comme dans Q1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n \leq V_n$$

♣ L'idée !
On montre que $\sum v_n$ est divergente en montrant, via le théorème de comparaison sur les suites, que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

croissante, elle serait alors majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$... et on obtiendrait ainsi, par théorème de convergence monotone, la convergence de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'où l'absurdité.

Conclusion : par théorème de comparaison, on a $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$. Par conséquent, la série $\sum v_n$ est divergente.

⋆

5 ♥ Théorème des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

⋆ Démonstration : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes telles que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, d'où : la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Mais, par hypothèse, la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Par conséquent : la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq u_n$$

Or :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle est donc minorée par son premier terme ;
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme.

Par transitivité, on obtient ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq u_0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_0$$

On a donc :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée (par v_0),
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée (par u_0).

Par théorème de convergence monotone, ces deux suites convergent respectivement vers des réels ℓ et ℓ'.
On a aussi :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) &= \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{(licite, car les deux limites en jeu sont finies)} \\ &= \ell' - \ell \end{aligned}$$

Mais, par hypothèse : $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. D'où :

$$\ell = \ell'$$

Conclusion : les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

⋆

♣ L'idée !
Prouver la convergence de (u_n) et (v_n), pour écrire $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n$. La troisième hypothèse impliquera alors qu'elles convergent vers la même limite... Penser au théorème de convergence monotone, puisque (u_n) et (v_n) sont monotones...

6 ♣ Équivalent de la série harmonique

On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

⋆ Démonstration : Pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$.

- Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, donc sur $[k; k+1]$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $k \leq k+1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

★ Classique ! ★
On utilise une comparaison série/intégrale pour déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles d'une série divergente, ou un équivalent du reste d'une série convergente.

À retenir...
On retient la méthode mise en place pour établir cet encadrement classique !

- On a donc :
$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
D'où, en sommant de 1 à $n-1$, licite car $n \geq 2$, et par télescopage :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
Or :
  - ⋆ Avec le changement d'indice $i = k+1$, on a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \\ &= S_n - 1 \end{aligned}$$
  - ⋆ et :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_n - \frac{1}{n}$$

D'où :
$$S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$$
- ⋆ De l'inégalité de gauche, on déduit :
$$S_n \leq \ln(n) + 1$$
  ⋆ De l'inégalité de droite, on déduit :
$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n$$
- On obtient ainsi :
$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$$
Et, comme $n \geq 2$, on a $\ln(n) > 0$. D'où :
$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

On a finalement établi :
$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
Mais :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = 1 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right)$$
Par théorème d'encadrement, on conclut :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$$
Et ainsi :
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

⋆

7 ♠ Formule de Taylor avec reste intégral

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I.
Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors :
$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

⋆

Démonstration : Soit $x \in I$. Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$.
On a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{0} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f'(t)dt &= \frac{(x-a)^0}{0!} f(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)dt \\ &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \\ &= f(a) + \big[f(t)\big]_a^x \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$
L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ et montrons $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$.
Par hypothèse de récurrence :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$
Procédons ensuite à une intégration par parties...
Posons : $\left| \begin{array}{l} u : t \longmapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v : t \longmapsto f^{(n+1)}(t) \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,x]$ (ou $[x;a]$) et pour tout $t \in [a;x]$ (ou $[x;a]$) : $\left| \begin{array}{l} u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} \\ v'(t) = f^{(n+2)}(t) \end{array} \right.$.
On obtient alors :
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &\overset{\text{IPP}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$
L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors :
$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$
⋆

8 ♣ Une intégrale classique

$$\forall p,q \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

⋆ Démonstration : Notons, pour tous $p,q \in \mathbb{N}$, $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

- Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Commençons par une intégration par parties...
Posons : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto \frac{x^{p+1}}{p+1} \\ v : x \longmapsto (1-x)^q \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = x^p \\ v'(x) = -q(1-x)^{q-1} \end{array} \right.$.
D'où :
$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx \\ &\overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 -q(1-x)^{q-1}\frac{x^{p+1}}{p+1}\,dx \\ &= \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx \\ &= \frac{q}{p+1} I(p+1,q-1) \end{aligned}$$
Puisque $q \in \mathbb{N}^*$, on obtient :
$$I(p+1,q-1) = \frac{p+1}{q} I(p,q)$$
On a ainsi établi :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ I(p+1,q-1) = \frac{p+1}{q} I(p,q)$$

- Par récurrence, démontrons : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

  ⋆ **Initialisation.** Pour $p = 0$:
  Soit $q \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} I(0,q) &= \int_0^1 (1-x)^q\,dx \\ &= \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{0!q!}{(0+q+1)!} &= \frac{q!}{(q+1)!}\\ &= \frac{1}{q+1}\end{aligned}$$

D'où :

$$I(0,q) = \frac{1}{q+1}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

⋆ **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons : $\forall q \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Montrons : $\forall q \in \mathbb{N},\ I(p+1,q) = \dfrac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!}$.

Soit $q \in \mathbb{N}$. D'après le point précédent, licite car $p \in \mathbb{N}$ et $q+1 \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}I(p+1,q) &= \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1)\\ &= \frac{p+1}{q+1}\frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!} && \text{hypothèse de récurrence, licite car } q+1 \in \mathbb{N}\\ &= \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!}\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall p,q \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Attention ! On utilise le point précédent avec $q+1$ au lieu de q (licite, car $q \in \mathbb{N}$, donc $q+1 \in \mathbb{N}^*$) :

$$I(p+1,q) = \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1)$$

Comment retrouver l'expression de $I(p,q)$ si elle n'est pas donnée ?

On a :

$$\begin{aligned}I(p,q) &= \frac{q}{p+1} I(p+1,q-1)\\ &= \frac{q}{p+1}\frac{q-1}{p+2} I(p+2,q-2)\\ &= \frac{q}{p+1}\frac{q-1}{p+2}\frac{q-2}{p+3} I(p+3,q-3)\\ &= \dots\\ &= \frac{q}{p+1}\frac{q-1}{p+2}\frac{q-2}{p+3}\times\dots\times\frac{1}{p+q} I(p+q,0) && I(p+q,0)=\int_0^1 x^{p+q}\,dx = \frac{1}{p+q+1}\\ &= \frac{q}{p+1}\frac{q-1}{p+2}\frac{q-2}{p+3}\times\dots\times\frac{1}{p+q}\frac{1}{p+q+1}\\ &= \frac{q!}{(p+1)(p+2)\dots(p+q+1)}\\ &= \frac{q!p!}{(p+q+1)!}\end{aligned}$$

⋆

9 ♥ Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements.
Si **$(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est système complet d'évènements**, alors, pour tout $B \in \mathcal{A}$, la série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i \cap B)$ est convergente et :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

⋆ Démonstration : Supposons que $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.
Soit $B \in \mathcal{A}$. On a :

$$\begin{aligned}B &= \Omega \cap B && \text{car } (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est un sce, donc } \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \Omega\\ &= \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \cap B && \text{distributivité de } \cap \text{ sur } \cup\\ &= \bigcup_{i=0}^{+\infty} (A_i \cap B)\end{aligned}$$

L'idée ! Écrire B comme union d'évènements deux à deux incompatibles...

Les évènements de cette union sont-ils deux à deux incompatibles ? Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \neq j$. On a :

$$\begin{aligned}(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) &= (A_i \cap A_j) \cap B && \text{par associativité et commutativité de } \cap\\ &= \varnothing \cap B && \text{car } (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est un sce}\\ &= \varnothing\end{aligned}$$

L'union $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} (A_i \cap B)$ est donc une union d'évènements deux à deux incompatibles...
Par σ-additivité de $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Vocabulaire La σ-additivité de $\mathbb{P}$ est la propriété (incluse dans la définition de probabilité) énonçant que la probabilité d'une union d'évènements deux à deux incompatibles est la somme des probabilités de ces évènements.

10 ♥ Propriétés d'une probabilité

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$.

Q1# Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ *(croissance de $\mathbb{P}$)*

Q2# $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(formule de Poincaré)*

Démonstration :

Q1# Supposons que $A \subset B$. On a :

$$\begin{array}{rcl} B & = & \Omega \cap B \\ & = & (A \cup \overline{A}) \cap B \\ & = & (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \\ & = & A \cup (\overline{A} \cap B) \end{array}$$

$A \cup \overline{A} = \Omega$

distributivité de $\cap$ sur $\cup$

$A \subset B$, donc $A \cap B = A$

Or, les évènements A et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles, d'où :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Et comme $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \geq 0$, on a bien :

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

Q2# On a :

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & = & \Omega \cap (A \cup B) \\ & = & (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) \\ & = & A \cup (\overline{A} \cap B) \end{array}$$

$A \cup \overline{A} = \Omega$

"factorisation" de $\cup$ sur $\cap$

Or, les évènements A et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles. D'où :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales avec $(A, \overline{A})$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

♣ L'idée !
Écrire B comme l'union disjointe de A et d'un autre évènement.

♣ L'idée !
Écrire $A \cup B$ comme l'union disjointe de A et d'un autre évènement.

À retenir...
$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$... et à démontrer en partant du membre de droite si besoin.

11 ♥ Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$.

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors l'application $\mathbb{P}_A : B \longmapsto \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Démonstration : Supposons que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

- Soit $B \in \mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection, on a $A \cap B \in \mathcal{A}$, ainsi $\mathbb{P}(A \cap B)$ existe. Or $\mathbb{P}(A) \neq 0$, donc $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ existe.
  Par conséquent : $\mathbb{P}_A$ est une application définie sur $\mathcal{A}$.
- Soit $B \in \mathcal{A}$.
  - ⋆ $\mathbb{P}_A(B)$ est le quotient de deux réels positifs, donc :
  $$\mathbb{P}_A(B) \geq 0$$
  - ⋆ Ensuite, on sait que
  $$A \cap B \subset A$$
  D'où, par croissance de $\mathbb{P}$ (qui est une probabilité) :
  $$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$$
  Puis, en divisant par $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on obtient :
  $$\mathbb{P}_A(B) \leq 1$$

  Par conséquent : $\mathbb{P}_A$ est à valeurs dans $[0; 1]$.

☞ Rappel...
Il faut que :
• $\mathbb{P}_A$ soit définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0; 1]$,
• $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$,
• si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles, alors
$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$.

- Puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(\Omega) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= 1\end{aligned}$$

- Enfin, considérons $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(A\cap\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(A\cap B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)} \quad \text{distributivité de } \cap \text{ sur } \cup\end{aligned}$$

Montrons que la famille $(A\cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \neq j$. On a :

$$\begin{aligned}(A\cap B_i)\cap(A\cap B_j) &= A\cap(B_i\cap B_j) && \text{par associativité et commutativité de } \cap\\ &= A\cap\varnothing && \text{car } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles}\\ &= \varnothing\end{aligned}$$

La famille $(A\cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une famille d'évènements deux à deux incompatibles. D'où, en reprenant, et par σ-additivité de $\mathbb{P}$ (qui est une probabilité) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A\cap B_n)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{P}(A\cap B_n)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}_A(B_n)\end{aligned}$$

D'où la $\sigma-$additivité de $\mathbb{P}_A$.

Conclusion : si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

⋆

12 ♥ Variance d'une VA suivant la loi $\mathscr{G}(p)$

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $p \in]0;1[$.
Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

⋆ Démonstration : Supposons $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

☞ **Rappel...**
Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = n]) = p(1-p)^{n-1}$.

On admet que X possède une espérance égale à $\dfrac{1}{p}$. Ensuite :

- Par théorème de transfert :

X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geq 1} n^2\mathbb{P}([X = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^2\mathbb{P}([X = n]) &= \sum_{n=1}^{N} n^2 p(1-p)^{n-1}\\ &= p\sum_{n=1}^{N}\big(n(n-1)+n\big)(1-p)^{n-1} \quad \text{linéarité de la somme}\\ &= p(1-p)\sum_{n=1}^{N} n(n-1)(1-p)^{n-2} + p\sum_{n=1}^{N} n(1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

Or, $p \in]0;1[$, donc $1-p \in]-1;1[$. Ainsi les séries $\sum\limits_{n\geq 1} n(n-1)(1-p)^{n-2}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} n(1-p)^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes.
Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} n^2\mathbb{P}([X = n])$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes).

- On en déduit que X admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}([X=n]) \\
&= p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} + p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \\
&= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + \mathbb{E}(X) \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \\
&= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

♡ Astuce du chef ! ♡
A l'oral, on dit "variance égale moment d'ordre 2 moins carré de l'espérance".

13 ♥ Stabilité des lois de Poisson

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*^+$ ainsi que X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si X et Y sont **indépendantes** telles que $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)}$ et $\boldsymbol{Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)}$; alors : $X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

Démonstration :

- Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$, on a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
  Par conséquent : $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\left([X=k]\right)_{k\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X+Y=n]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X+Y=n]\cap[X=k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y=n-k]\cap[X=k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n-k])\mathbb{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} \\
&= \frac{1}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} \\
&= \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n
\end{aligned}$$

indépendance de X et Y

$\forall k \in \mathbb{N} : n-k \in Y(\Omega) \iff k \leq n$
Donc : $\forall k \in [\![n+1; +\infty[\![,\ \mathbb{P}([Y=n-k]) = 0$.
$\forall k \in \mathbb{N},\ k \in X(\Omega)$

formule du binôme de Newton

- Pour finir, montrons que $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.

  $\boxed{\subset}$ Déjà établie.

  $\boxed{\supset}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède :
  $$\mathbb{P}([X+Y=n]) = \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}([X+Y=n]) \neq 0$$
  Par conséquent :
  $$[X+Y=n] \neq \varnothing$$
  Et donc :
  $$n \in (X+Y)(\Omega)$$
  D'où l'inclusion recherchée.

Conclusion : $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X+Y=n]) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$.
Ainsi : $X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

★Subtil...★
On ne peut pas conclure sur l'égalité pour l'instant... En effet, on sait qu'il existe au moins une issue réalisant $[X=0]$, et au moins une réalisant $[Y=0]$...
Mais rien ne dit qu'il y a bien au moins une issue commune à ces deux évènements.

✘ Attention !
On veut remplacer $\mathbb{P}([X=k])$ et $\mathbb{P}([Y=n-k])$...
Et si $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$:
$$\mathbb{P}([Z=z]) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^z}{z!} & \text{si } z \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } z \notin \mathbb{N} \end{cases}$$
De façon générale, quand on veut remplacer une probabilité $\mathbb{P}([Z=z])$, on regarde toujours si $z \in Z(\Omega)$ ou non !

Petite remarque
Voici comment on justifie rapidement l'autre inclusion une fois les probabilités connues. Son caractère simple et indépendant du contexte justifie que cette étape n'est, en pratique, pas indispensable...

✘ Attention !
On sait que $A = \varnothing \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$, et donc sa contraposée :
$\mathbb{P}(A) \neq 0 \Longrightarrow A \neq \varnothing$.
Les réciproques sont fausses (penser aux évènements quasi-impossibles).

14 ♠ Minimum de VA indépendantes suivant une loi géométrique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $p \in]0;1[$, $q = 1-p$ ainsi que X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $M = \min(X, Y)$ et on admet que M est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si X et Y sont **indépendantes** et que : $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$; alors la variable aléatoire M suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

Démonstration :

- Puisque X et Y suivent des lois géométriques, on a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Par conséquent : $M(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$[M > n] = [X > n] \cap [Y > n]$$
Ainsi :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([M > n]) & = & \mathbb{P}\big([X > n] \cap [Y > n]\big) & \\ & = & \mathbb{P}([X > n])\mathbb{P}([Y > n]) & \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ & = & \big(\mathbb{P}([X > n])\big)^2 & X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \end{array}$$
Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc :
$$[X > n] = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [X = k]$$
Ainsi, par incompatibilité des évènements de la famille $\big([X = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$, la série $\sum\limits_{k \geq n+1} \mathbb{P}([X = k])$ est convergente et :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X > n]) & = & \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=n+1}^{n} q^{k-1} p & \text{changement d'indice } i = k - (n+1) \\ & = & p \sum\limits_{i=0}^{+\infty} q^{i+n} & \\ & = & p q^n \dfrac{1}{1-q} & p = 1 - q \\ & = & q^n & \end{array}$$
On obtient ainsi :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([M > n]) & = & \big(1 - (1 - q^n)\big)^2 \\ & = & q^{2n} \end{array}}$$
- Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$.
  - ⋆ On a :
  $$[M \geq n] = [M = n] \cup [M > n]$$
  Or, les évènements $[M = n]$ et $[M > n]$ sont incompatibles, d'où :
  $$\mathbb{P}([M \geq n]) = \mathbb{P}([M = n]) + \mathbb{P}([M > n])$$
  - ⋆ Et ainsi :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([M = n]) & = & \mathbb{P}([M \geq n]) - \mathbb{P}([M > n]) & M \text{ est à valeurs entières} \\ & = & \mathbb{P}([M > n-1]) - \mathbb{P}([M > n]) & \text{résultat encadré, licite car } n-1, n \in \mathbb{N} \ (n \in \mathbb{N}^*) \\ & = & q^{2n-2} - q^{2n} & \\ & = & q^{2n-2}(1 - q^2) & \\ & = & \big(1 - (1 - q^2)\big)^{n-1}(1 - q^2) & \end{array}$$
- Pour finir, montrons que $M(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  - $\boxed{\subset}$ Déjà établie.
  - $\boxed{\supset}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède :
  $$\mathbb{P}([M = n]) = \big(1 - (1 - q^2)\big)^{n-1}(1 - q^2)$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}([M = n]) \neq 0$$
  Par conséquent :
  $$[M = n] \neq \varnothing$$
  Et donc :
  $$n \in M(\Omega)$$
  D'où l'inclusion recherchée.

Conclusion : $M(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([M = n]) = \big(1 - (1 - q^2)\big)^{n-1}(1 - q^2)$.
Ainsi : $M \hookrightarrow \mathscr{G}(1 - q^2)$.

★Subtil...★
On ne peut pas encore dire que $\mathbb{N}^* \subset M(\Omega)$...

♣ L'idée !
On travaille sur $[M > n]$, facile à interpréter... L'objectif étant d'obtenir $\mathbb{P}([M = n])$, il faudra un lien entre $[M = n]$ et $[M > n]$.

✘ Attention !
$\mathbb{P}([M = n]) \neq 0 \Rightarrow [M = n] \neq \varnothing$
L'implication réciproque est fausse !

15 ♥ Somme de VA indépendantes de loi de Bernoulli

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $p \in]0;1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes** telles que : $\boldsymbol{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p)}$; alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$$

⋆ Démonstration : Donnons deux démonstrations de ce résultat. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. **Démonstration 1.**
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $X_k(\Omega) = \{0;1\}$, donc $S_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
   - Démontrons par récurrence :

Petite remarque : On pense à une récurrence puisque $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$...

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

⋆ **Initialisation.** Pour $n = 1$:
On a $S_1 = X_1$. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_1 = 0]) &= 1-p \\ &= \binom{1}{0} p^0 (1-p)^{1-0}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_1 = 1]) &= p \\ &= \binom{1}{1} p^1 (1-p)^{1-1}\end{aligned}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

⋆ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons "$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$" ;

et montrons "$\forall k \in [\![0;n+1]\!],\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}$".

Soit $k \in [\![0;n+1]\!]$. Remarquons que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) &= \mathbb{P}([S_n + X_{n+1} = k]) \\ &= \mathbb{P}\big([S_n + X_{n+1} = k] \cap [X_{n+1} = 0]\big) + \mathbb{P}\big([S_n + X_{n+1} = k] \cap [X_{n+1} = 1]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([S_n = k] \cap [X_{n+1} = 0]\big) + \mathbb{P}\big([S_n = k-1] \cap [X_{n+1} = 1]\big) \\ &= \mathbb{P}([S_n = k])\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}([S_n = k-1])\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) \\ &= (1-p)\mathbb{P}([S_n = k]) + p\mathbb{P}([S_n = k-1])\end{aligned}$$

formule des probabilités totales avec $([X_{n+1} = 0], [X_{n+1} = 1])$ comme sce

$X_1, \ldots, X_{n+1}$ sont indépendantes donc, par lemme des coalitions, S_n et X_{n+1} sont indépendantes

✘ Attention ! $\mathbb{P}([S_n = i]) = 0$ si $i \notin [\![0;n]\!]$...

Distinguons maintenant trois cas :

◇ Si $k = 0$:
Dans ce cas, $\mathbb{P}([S_n = k-1]) = \mathbb{P}([S_n = -1]) = 0$, car $S_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
Et alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_{n+1} = 0]) &= (1-p)\mathbb{P}([S_n = 0]) \\ &= (1-p)\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \\ &= \binom{n+1}{0} p^0 (1-p)^{n+1}\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence

◇ Si $k = n+1$:
Dans ce cas, $\mathbb{P}([S_n = k]) = \mathbb{P}([S_n = n+1]) = 0$, car $S_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
Et alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_{n+1} = n+1]) &= p\mathbb{P}([S_n = n]) \\ &= p\binom{n}{n} p^n (1-p)^0 \\ &= \binom{n+1}{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n+1-(n+1)}\end{aligned}$$

hypothèse de récurrence

◇ Si $k \in [\![1;n]\!]$.
On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) &= (1-p)\mathbb{P}([S_n = k]) + p\mathbb{P}([S_n = k-1]) \\ &= (1-p)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + p\binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)} \\ &= \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) p^k (1-p)^{n+1-k} \\ &= \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}\end{aligned}$$

hypothèse de récurrence, avec $k, k-1 \in [\![0;n]\!]$

triangle de Pascal

Dans les trois cas, on a bien établi :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}$$

L'hérédité est ainsi établie.

⋆ **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

- D'après le point précédent, on a également :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) \neq 0$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ [S_n = k] \neq \varnothing$$

Et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [\![0;n]\!] \subset S_n(\Omega)$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$.

2. **Démonstration 2.**
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     - ⋆ On sait que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $X_k(\Omega) = \{0;1\}$, donc $S_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
     - ⋆ Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

$[S_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, la somme des réalisations des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ est égale à k
si, et seulement si, k des n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ prennent 1 comme valeur, les autres prennent 0 $\quad \forall i \in [\![1;n]\!],\ X_i(\Omega) = \{0;1\}$

L'évènement $[S_n = k]$ est alors constitué de $\binom{n}{k}$ issues différentes ayant toutes la même probabilité d'apparition, égale à la probabilité $\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i = 1]\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i = 0]\right)\right)$.
Or, par indépendance des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i = 1]\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i = 0]\right)\right) &= \left(\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}([X_i = 1])\right) \times \left(\prod_{i=k+1}^{n}\mathbb{P}([X_i = 0])\right) \\ &= p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned} \quad \forall i \in [\![1;n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$$

☞ **Rappel...**
Si a et b sont des entiers tels que $a \leq b$, alors : $\mathrm{Card}\left([\![a;b]\!]\right) = b - a + 1$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- D'après le point précédent, on a également :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) \neq 0$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ [S_n = k] \neq \varnothing$$

Et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [\![0;n]\!] \subset S_n(\Omega)$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$.

⋆

16 ♥ Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels de l'intervalle $]0;1[$, $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p_n)}$ et $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda}$; alors : la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}\left(\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

⋆ Démonstration : Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, pour $n \in [\![k;+\infty[\![$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n^k\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \quad p_n \neq 1 \\ &= \frac{(np_n)^k}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k}\end{aligned}$$

Petite remarque
n est destiné à tendre vers $+\infty$, donc il n'est pas dérangeant de le prendre supérieur ou égal à k.

Pourquoi ?
On factorise chaque facteur par n. Et de $n-k+1$ à n, il y a k facteurs (car $\mathrm{Card}\left([\![n-k+1,n]\!]\right) = n-(n-k+1)+1 = k$).
On peut aussi dire que chaque facteur est équivalent à n...
Mais ça ne dispense pas de les compter !

- Par opération :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(np_n)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$
- Par opération :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \right) = 1$$
- De plus, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, on a : $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ et donc :
  - ⋆ par opération :
$$\lim_{n\to+\infty} (1-p_n)^k = 1$$
  - ⋆ et :
$$(1-p_n)^n \underset{\text{Réflexe !}}{=} \exp\left(n\ln(1-p_n)\right)$$
  Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -p_n = 0$ on a (équivalent usuel) :
$$\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -p_n$$
  D'où :
$$n\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -np_n$$
  Par conséquent :
$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-p_n) = -\lambda$$
  D'où, par composition de limites :
$$\lim_{n\to+\infty} \exp(n\ln(1-p_n)) = \mathrm{e}^{-\lambda}$$

✘ Attention !
$\lim\limits_{n\to+\infty} (1-p_n)^k$ s'obtient par opération (car k ne bouge pas...) alors que $(1-p_n)^n$ donne *a priori* une FI "1^{∞}".

Petite remarque
On ne peut pas composer les équivalents par une fonction. Donc on passe à la limite, puis on conclut pas composition de limites.

Par produit, on obtient finalement :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

⋆

17 ♣ Autour des VA indicatrices

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q1# $\mathbb{1}_\varnothing$ suit la loi certaine égale à 0

Q2# $\mathbb{1}_\Omega$ suit la loi certaine égale à 1

Q3# Pour tout $A \in \mathcal{A}$: si $A \neq \varnothing$ et $A \neq \Omega$, alors $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$

Q4# Pour tout $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

Q5# Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$: $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

Q6# Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$: $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

⋆ Démonstration :

Q1# Par définition, on a : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_\varnothing(\omega) = 0$. D'où le résultat.

Q2# Par définition, on a : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_\Omega(\omega) = 1$. D'où le résultat.

Q3# Soit $A \in \mathcal{A}$. Supposons que $A \neq \varnothing$ et $A \neq \Omega$.
- Montrons que $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0;1\}$.

  $\boxed{\subset}$ Par définition : $\mathbb{1}_A(\Omega) \subset \{0;1\}$.

  $\boxed{\supset}$ Puisque $A \neq \varnothing$: $1 \in \mathbb{1}_A(\Omega)$. Puisque $A \neq \Omega$: $0 \in \mathbb{1}_A(\Omega)$.
- Ensuite, soit $\omega \in \Omega$. On a :
$$\begin{aligned} \omega \in [\mathbb{1}_A = 1] &\iff \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \\ &\iff \omega \in A \end{aligned}$$
  D'où : $[\mathbb{1}_A = 1] = A$. Et ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 1]) = \mathbb{P}(A)$.

Conclusion : $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$.

☞ Pour info...
Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors $\mathbb{1}_A$ suit une loi quasi-certaine égale à 0.
Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors $\mathbb{1}_A$ suit une loi quasi-certaine égale à 1.

Q4#

Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :
- Si $\omega \in A$.
  - ⋆ Par définition, on a ainsi $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$.
  - ⋆ Mais, puisque $\omega \in A$, on a $\omega \notin \overline{A}$. D'où $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$.

  Ainsi :
$$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

♣ Méthode !
Il s'agit d'établir une égalité entre deux applications X et Y toutes deux définies sur Ω. On montre donc que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = Y(\omega)$.

- Si $\omega \in \overline{A}$.
  - Puisque $\omega \in \overline{A}$, on a $\omega \notin A$, d'où $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$.
  - Or $\omega \in \overline{A}$, donc, par définition : $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$.

  Ainsi :
$$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

Conclusion : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$. Autrement dit : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Q5# Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :

- Si $\omega \in A \cap B$.
  - Alors, par définition, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1$.
  - Aussi, puisque $\omega \in A \cap B$, on a $\omega \in A$ ET $\omega \in B$. Par définition, on a alors : $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ ET $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$. D'où : $\mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) = 1$.

  Ainsi :
$$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$
- Si $\omega \in \overline{A \cap B}$.
  - Alors, par définition, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$.
  - De plus, on sait, d'après la loi de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Ainsi, puisque $\omega \in \overline{A} \cup \overline{B}$, on a $\omega \in \overline{A}$ OU $\omega \in \overline{B}$. D'où, par définition : $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ OU $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$. Ce qui donne (règle du produit nul) : $\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) = 0$.

  Ainsi :
$$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

Conclusion : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$. Autrement dit : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Q6# D'après les lois de Morgan, on sait que $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A\cup B} & = & \mathbb{1}_{\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}} & \\ & = & 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} & \text{Q3} \\ & = & 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}} \times \mathbb{1}_{\overline{B}} & \text{Q4} \\ & = & 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) & \text{Q3} \\ & = & 1 - (1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{A\cap B}) & \text{Q4} \\ & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} & \end{array}$$

Conclusion : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

Petite remarque

On pourrait démontrer ce résultat en procédant comme en Q4.

⋆

18 ♥ Inégalité de Markov

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si X est **à valeurs positives** et **admet une espérance**, alors :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}([X \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

⋆ Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Introduisons la variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } X(\omega) \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $Y(\Omega) = \{0; a\}$ est un ensemble fini, donc Y possède une espérance et :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y) & = & 0\mathbb{P}([Y = 0]) + a\mathbb{P}([Y = a]) & [Y = a] = [X \geq a] \\ & = & a\mathbb{P}([X \geq a]) & \end{array}$$
- Montrons que $Y \leq X$. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :
  - si $\omega \in [X \geq a]$:
    Dans ce cas, $Y(\omega) = a$ et $X(\omega) \geq a$. D'où : $Y(\omega) \leq X(\omega)$.
  - si $\omega \notin [X \geq a]$:
    Dans ce cas, $Y(\omega) = 0$. Mais X est à valeurs positives, donc $X(\omega) \geq 0$. D'où : $Y(\omega) \leq X(\omega)$.

  Conclusion : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) \leq X(\omega)$.
- Puisque $Y \leq X$ et que Y et X possèdent une espérance, par croissance de l'espérance, on a :
$$\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X)$$
  Autrement dit :
$$a\mathbb{P}([X \geq a]) \leq \mathbb{E}(X)$$
  Et comme $a > 0$, on obtient :
$$\mathbb{P}([X \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

⋆

Important !

Il s'agit de démontrer :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) \leq X(\omega)$$

☞ Rappel...

Croissance de l'espérance :
Si X et Y sont deux VA telles que :
- X et Y ont des espérances
- Y est presque-sûrement inférieure ou égale à X, autrement dit $\mathbb{P}([Y \leq X]) = 1$ (pas nécessaire que ce soit partout le cas)

Alors : $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X)$.

19 ♥ Applications linéaires coïncidant sur une base

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si **f et g coïncident sur une base de E**, alors f et g sont égales.

Autrement dit : Une application linéaire définie sur E est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie aux vecteurs d'une base de E.

⋆ Démonstration : Notons $n = \dim(E)$ et considérons une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E. Supposons que f et g coïncident sur cette base ; autrement dit, supposons : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ f(e_i) = g(e_i)$. Montrons que $f = g$; autrement dit, montrons : $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, il existe des uniques réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tels que : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) && \text{linéarité de } f \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) && \text{hypothèse} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(e_i) && \text{linéarité de } g \\ &= g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

On a ainsi établi : $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$. ⋆

Petite remarque Puisque l'unicité des λ_i n'a pas été utilisée, seul le caractère générateur de la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ suffit.

20 ♥ Noyau et image d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Q1# $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Q2# $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

☞ Rappels...

$$\ker(f) = \{x \in E \ /\ f(x) = 0_F\}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F / \exists x \in E / y = f(x)\}$$
ou bien :
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\}$$

⋆ Démonstration :

Q1#
- Par définition : $\ker(f) \subset E$.
- Puisque f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Donc $0_E \in \ker(f)$. Ainsi, $\ker(f)$ est non vide.
- Montrons que $\ker(f)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soient $u, v \in \ker(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u + \mu v \in \ker(f)$.
  - ⋆ On a déjà $u, v \in E$ et E étant un espace vectoriel, on obtient : $\lambda u + \mu v \in E$.
  - ⋆ Ensuite :
  $$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= \lambda f(u) + \mu f(v) && \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda \times 0_F + \mu \times 0_F && \text{car } u, v \in \ker(f) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

  Ainsi :
  $$\lambda u + \mu v \in \ker(f)$$

Conclusion : $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Q2#
- Par définition : $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
- Puisque f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$. Donc $0_F \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est non vide.
- Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soient $y, z \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda y + \mu z \in \mathrm{Im}(f)$.
  - ⋆ On a déjà $y, z \in F$ et F étant un espace vectoriel, on obtient : $\lambda y + \mu z \in F$.
  - ⋆ Ensuite :
  Puisque $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $u \in E$ tel que $y = f(u)$. Considérons un tel u.
  Puisque $z \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $v \in E$ tel que $z = f(v)$. Considérons un tel v.
  Par conséquent :
  $$\begin{aligned} \lambda y + \mu z &= \lambda f(u) + \mu f(v) && \text{linéarité de } f \\ &= f(\lambda u + \mu v) \end{aligned}$$
  Or E est un espace vectoriel, donc $\lambda u + \mu v \in E$. Et ainsi, $\lambda y + \mu z \in \mathrm{Im}(f)$.

Conclusion : $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. ⋆

21 ♥ Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
L'application linéaire f est injective, si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$.

☞ **Rappel...**
$\ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$

⋆ Démonstration : Raisonnons par double implication...

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est injective. Montrons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Raisonnons par double-inclusion.

$\boxed{\supset}$ Immédiat, car f est linéaire, donc $f(0_E) = 0_F$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \ker(f)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0_F \\ &= f(0_E) \quad \text{linéarité de } f \end{aligned}$$

Par injectivité de f, on obtient : $x = 0_E$. D'où : $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

Par conséquent : $\ker(f) = \{0_E\}$.

☞ **Rappel...**
f injective sur E :
$\forall x, y \in E, \big(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\big)$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Montrons que f est injective. Soient $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow f(x) - f(y) = 0_F \\ &\Longrightarrow f(x-y) = 0_F \quad \text{linéarité de } f \\ &\Longrightarrow x - y \in \ker(f) \\ &\Longrightarrow x - y = 0_E \quad \ker(f) = \{0_E\} \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

Par conséquent : f est injective. ⋆

22 ♥ "Triangle de bijectivité" des applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors :

$$\begin{tikzcd} f \text{ injective} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & f \text{ surjective} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & f \text{ bijective} & \end{tikzcd}$$

Important !
En pratique, si $\dim(E) = \dim(F)$ (et en particulier si $E = F$), alors on démontrera la bijectivité de f en démontrant son injectivité (par le noyau).

⋆ Démonstration : Supposons que $\dim(E) = \dim(F)$.

- Montrons que l'injectivité de f équivaut à sa surjectivité.
  Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème du rang :
  $$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f)$$
  Ensuite :
  $$\begin{aligned} \big(f \text{ est injective}\big) &\Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\} \\ &\Longleftrightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(E) \quad \text{théorème du rang} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(F) \quad \dim(E) = \dim(F) \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F \\ &\Longleftrightarrow \big(f \text{ est surjective}\big) \end{aligned}$$

☞ **Rappels...**
• Le singleton $\{0_E\}$ est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 0.
• $\mathrm{Im}(f)$ est un ssev de F
• le seul ssev de F de dimension égale à $\dim(F)$ est F lui-même

- On sait déjà que la bijectivité de f implique son injectivité (par définition).
  Mais, d'après ce qui précède, l'injectivité de f implique sa surjectivité. Par conséquent, si f est injective, elle est également surjective et donc bijective. L'injectivité de f implique donc sa bijectivité.
  Par conséquent : la bijectivité de f équivaut à sa surjectivité.
- De la même façon, la bijectivité de f équivaut à sa surjectivité.

⋆

23 ♥ Majoration du rang d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Le rang de f est fini et :
$$\operatorname{rg}(f) \leq \min\left(\dim(E); \dim(F)\right)$$

DÉMONSTRATION :

- Par définition, $\operatorname{rg}(f) = \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right)$. Or $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, qui lui est de dimension finie. Ainsi, $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie et donc le rang de f est fini.
- Montrons que $\operatorname{rg}(f) \leq \dim(E)$ ET $\operatorname{rg}(f) \leq \dim(F)$.
  - ⋆ D'après ce qui précède, on a déjà :
  $$\operatorname{rg}(f) \leq \dim(F)$$
  - ⋆ Notons $n = \dim(E)$ et considérons $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On sait que :
  $$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\right)$$
  Autrement dit, la famille $\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\right)$ est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$. Et par conséquent :
  $$\operatorname{Card}\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\right) \geq \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right)$$
  On a ainsi :
  $$\dim(E) \geq \operatorname{rg}(f)$$

  Par conséquent :
  $$\operatorname{rg}(f) \leq \left(\dim(E); \dim(F)\right)$$

À retenir...

$$x \leq \min(a, b) \iff \begin{cases} x \leq a \\ \text{ET} \\ x \leq b \end{cases}$$

24 ♥ CARACTÉRISATION DES VALEURS PROPRES

Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \left(\lambda \text{ est valeur propre de } A\right) &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \\ &\iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \neq n \\ &\iff \left(A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\right) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

- D'après le cours (négation du triangle d'équivalences), on a déjà :
$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} &\iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \neq n \\ &\iff \left(A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\right) \end{aligned}$$
- Ensuite :
$$\begin{aligned} \left(\lambda \text{ est valeur propre de } A\right) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ \left(X \neq 0_{n,1} \text{ ET } AX = \lambda X\right) \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ \left(X \neq 0_{n,1} \text{ ET } (A - \lambda)X = 0_{n,1}\right. \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ \left(X \neq 0_{n,1} \text{ ET } X \in \ker(A - \lambda I_n)\right) \\ &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \end{aligned}$$

On conclut en rassemblant les deux points...

25 ♠ PROPRIÉTÉS SUR LES PROJECTEURS

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Définition : on dit que f est un **projecteur de E** lorsque $f \circ f = f$.
Résultats :

Q1# Si f est un projecteur de E, alors :

- $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$
- $\operatorname{Im}(f) = \ker(f - \operatorname{id})$

Q2# Tout projecteur de E est diagonalisable (HP)

Petite remarque

L'identité et l'endomorphisme nul sont deux projecteurs.

DÉMONSTRATION :

Q1# Supposons que f est un projecteur de E, autrement dit, supposons que $f \circ f = f$.

- Montrons que $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$. Raisonnons par double-inclusion...

  $\boxed{\supset}$ Immédiat, puisque $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \ker(f)$. Montrons que $x = 0$.

- Puisque $x \in \text{Im}(f)$, il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$. Considérons un tel z.
- Puisque $x \in \ker(f)$, on a $f(x) = 0$.

Ainsi :

$$f\big(f(z)\big) = 0$$

Mais f est un projecteur, donc $f \circ f = f$. D'où :

$$f\big(f(z)\big) = f(z)$$

Et on obtient alors :

$$f(z) = 0$$

Or $f(z) = x$... D'où :

$$x = 0$$

Conclusion : si f est un projecteur, alors $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

☞ Pour info... Ce résultat peut aussi se déduire du suivant...

- Montrons que $\text{Im}(f) = \ker(f - \text{id})$. Raisonnons par double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \text{Im}(f)$. Montrons que $y \in \ker(f - \text{id})$.
Puisque $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Considérons un tel x. Ensuite :

$$\begin{aligned}(f - \text{id})(y) &= f(y) - y \\ &\overset{y = f(x)}{=} f\big(f(x)\big) - f(x) \\ &= f \circ f(x) - f(x) \\ &\overset{f \circ f = f}{=} f(x) - f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$y \in \ker(f - \text{id})$$

D'où :

$$\text{Im}(f) \subset \ker(f - \text{id})$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \ker(f - \text{id})$. Montrons que $x \in \text{Im}(f)$.
Puisque $x \in \ker(f - \text{id})$, on a :

$$(f - \text{id})(x) = 0$$

Autrement dit :

$$f(x) = x$$

Par conséquent, x est bien l'image d'un élément de E (lui-même convient). Ainsi :

$$x \in \text{Im}(f)$$

D'où :

$$\ker(f - \text{id}) \subset \text{Im}(f)$$

Conclusion : si f est un projecteur, alors $\text{Im}(f) = \ker(f - \text{id})$.

Q2# Soit f un projecteur de E. Montrons que f est diagonalisable. Distinguons deux cas :

- Si f est l'identité ou l'endomorphisme nul, alors f est diagonalisable.
- Si f n'est ni l'identité ni l'endomorphisme nul.
  - ⋆ Puisque $f \circ f = f$, le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de f. Par conséquent : les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 1.
  - ⋆ Montrons que 0 est valeur propre de f. Autrement dit, montrons que f n'est pas bijectif.
    Raisonnons par l'absurde. Supposons que f est bijectif. Puisque $f \circ f = f$, en composant par f^{-1}, on obtient : $f = \text{id}$. Absurde.
    Par conséquent : f n'est pas bijectif et donc 0 est valeur propre de f.
  - ⋆ Montrons que 1 est valeur propre de f. Autrement dit, montrons que $f - \text{id}$ n'est pas bijectif.
    Raisonnons par l'absurde. Supposons que $f - \text{id}$ est bijectif. Puisque $f \circ f = f$, on a $(f - \text{id}) \circ f = 0$. D'où, en composant par $(f - \text{id})^{-1}$, on obtient : $f = 0$. Absurde.
    Par conséquent : $f - \text{id}$ n'est pas bijectif et donc 1 est valeur propre de f.
  - ⋆ 0 et 1 sont donc les valeurs propres de f ; et notons $E_0(f)$ et $E_1(f)$ les espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 1 respectivement.
    On a en fait :

$$E_0(f) = \ker(f)$$

Et :

$$\begin{aligned}E_1(f) &= \ker(f - \text{id}) \\ &\overset{\text{Q1}}{=} \text{Im}(f)\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\text{Im}(f)\big) + \dim\big(\ker(f)\big) = \dim(E)$$

D'où :

$$\dim\big(E_1(f)\big) + \dim\big(E_0(f)\big) = \dim(E)$$

Conclusion : f est diagonalisable.

Petite remarque

On conclut ici en utilisant la CNS de diagonalisabilité qui est HP. On pourrait s'en passer en raisonnant autrement (mais c'est plus long) :
- on note $d_1 = \dim\big(E_1(f)\big)$ et $d_0 = \dim\big(E_0(f)\big)$
- il existe une famille libre (et même une base) de $E_1(f)$ de cardinal d_1, de même pour $E_0(f)$, de cardinal d_0
- la concaténation de ces deux familles libres est libre (concaténation de familles libres de $\overrightarrow{\text{VP}}$ associés à des VP différentes) ; et elle est de cardinal $d_1 + d_0$
- enfin, par théorème du rang, $d_1 + d_0 = \dim(E)$... donc la famille mise en évidence est libre et de cardinal égal à la dimension de E : c'est donc une base de E
- il existe donc une base de E constituée de $\overrightarrow{\text{VP}}$ de f : f est donc diagonalisable.

⋆

26 ♠ Résolution de $y' + ay = 0$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une fonction continue sur I et f une fonction définie sur I.

Notons A une primitive de a sur I. On a :

$$\big(f \text{ est solution de l'EDL1 } y' + ay = 0\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-A(x)}\big)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, est :

$$\big\{x \in I \mapsto \lambda e^{-A(x)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\big\}$$

Petite remarque — Puisque a est continue sur l'intervalle I, elle admet des primitives sur I, qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

☞ Rappel... — Si F et G sont deux sous-ensembles d'un ensemble E, alors :
$E = F \iff \forall x \in E,\ (x \in F \iff x \in G)$

★ Démonstration : Il s'agit de montrer une équivalence. Raisonnons par double-implication :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
Considérons un tel λ.

- ⋆ Puisque A est une primitive d'une fonction continue sur I, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Par conséquent, la fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur I.
- ⋆ Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) + af(x) &= -A'(x)\lambda e^{-A(x)} + a(x)\lambda e^{-A(x)} \\ &= -a(x)\lambda e^{-A(x)} + a(x)\lambda e^{-A(x)} \quad A \text{ est une primitive de } a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de $y' + ay = 0$.

✓ Rigueur ! — Une solution de $y' + ay = 0$ est une fonction f qui vérifie :
- f est $\mathscr{C}^1$ sur I,
- $f' + af = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit f une solution de $y' + ay = 0$. Montrons :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-A(x)}$$

Travaillons déjà par équivalences... On a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-A(x)} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\ f(x)e^{A(x)} = \lambda$$

Posons alors la fonction $g : x \longmapsto f(x)e^{A(x)}$ et montrons qu'elle est constante sur I.
La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur I, car elle est solution de $y' + ay = 0$, donc la fonction g est un produit de deux fonctions dérivables (A est $\mathscr{C}^1$ sur I donc $\exp \circ A$ l'est également) sur I. Ainsi, g est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{A(x)} + f(x)A'(x)e^{A(x)} \\ &= e^{A(x)}\big(f'(x) + a(x)f(x)\big) \quad f \text{ est solution de } y' + ay = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction g, étant dérivable et de dérivée nulle sur un intervalle, est constante sur I.
Ainsi :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\ g(x) = \lambda$$

Autrement dit :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-A(x)}$$

Question : — Une fonction dérivable et de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ est-elle constante sur $\mathbb{R}^*$?

Conclusion : $\big(f \text{ est solution de l'EDL1 } y' + ay = 0\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-A(x)}\big)$ ★

Cas particulier — Dans le cas où a est constante, la fonction $x \longmapsto ax$ est une primitive de a, donc l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\big\{x \in I \mapsto \lambda e^{-ax} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\big\}$ (c'est le cas au programme).

27 ♥ Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée.
Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H).

Q1# S_H est un espace vectoriel.

Q2# Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H). Autrement dit :

solution générale de l'EDL	=	solution particulière de l'EDL	+	solution générale de l'équation homogène associée

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \big\{f_p + f_H \ / \ f_H \in S_H\big\}$$

★ Démonstration : Démontrons ce résultat dans le cas particulier d'une EDL1 normalisée à coefficient constant.
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et :

$$(E) : y' + ay = b$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.
Posons l'application $L : y \longmapsto y' + ay$ et montrons que L est une application linéaire de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$.

Petite remarque — La démonstration est analogue dans le cas général...

- Soit $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. On a ainsi $y' \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et donc $L(y) \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$: L est une application de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.
  On a :

$$\begin{aligned} L(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)' + a(\lambda f + \mu g) \\ &= \lambda(f' + af) + \mu(g' + ag) \quad \text{linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda L(f) + \mu L(g) \end{aligned}$$

Par conséquent : L est une application linéaire de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.
Revenons maintenant au cœur de la question...

P1# On a :

$$\begin{aligned} S_H &= \left\{y\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \;/\; y'+ay=0\right\} \\ &= \left\{y\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \;/\; L(y)=0\right\} \\ &= \ker(L) \end{aligned}$$

Conclusion : S_H est un espace vectoriel.

P2# Soit $y\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et supposons connue une solution particulière de (E), notée f_p. On a :

$$\begin{aligned} y\in S_E &\iff y'+ay=b \\ &\iff L(y)=L(f_p) && f_p \text{ solution de } (E)\text{, donc } f_p'+af_p=b \\ &\iff L(y-f_p)=0 && \text{linéarité de } L \\ &\iff y-f_p\in\ker(L) \\ &\iff y-f_p\in S_H && \text{point précédent} \\ &\iff \exists f_H\in S_H \;/\; y-f_p=f_H \\ &\iff \exists f_H\in S_H \;/\; y=f_p+f_H \end{aligned}$$

Conclusion : $S_E=\left\{f_p+f_H \;/\; f_H\in S_H\right\}$.

⋆

28 ♣ Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance

Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et X,Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.
Si X et Y **admettent une variance**, alors :

$$\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2\leq\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

⋆

Démonstration : Supposons que X et Y admettent une variance.
Soit $t\in\mathbb{R}$. La variable aléatoire $tX+Y$ est une combinaison linéaire de deux variables aléatoires admettant une variance, par conséquent, elle admet également une variance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(tX+Y) &= \mathbb{V}(tX)+2\mathrm{Cov}(tX,Y)+\mathbb{V}(Y) \\ &= t^2\mathbb{V}(X)+2t\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathbb{V}(Y) && \text{linéarité à gauche de la covariance} \end{aligned}$$

Distinguons deux cas :

- Si $\mathbb{V}(X)=0$.
  Dans ce cas, d'après ce qui précède :
  $$\forall t\in\mathbb{R},\ \mathbb{V}(tX+Y)=2t\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathbb{V}(Y)$$
  Or, on sait qu'une variance est toujours positive, d'où :
  $$\forall t\in\mathbb{R},\ 2t\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathbb{V}(Y)\geq 0$$
  Ce qui n'est possible que si $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors vérifiée.
- Si $\mathbb{V}(X)\neq 0$.
  Dans ce cas, la fonction $t\longmapsto t^2\mathbb{V}(X)+2t\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathbb{V}(Y)$ est une fonction polynomiale de degré 2 positive sur $\mathbb{R}$, car égale à la fonction $t\longmapsto\mathbb{V}(tX+Y)$ et qu'une variance est toujours positive.
  Par conséquent, son discriminant est négatif ou nul. Or, ce discriminant est égal à $4\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2-4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$...
  On en déduit :
  $$\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2\leq\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

⋆

Pourquoi ?
Une fonction affine de signe constant est une fonction constante... On peut le justifier rapidement en raisonnant par l'absurde en supposant que $\mathrm{Cov}(x,y)\neq 0$...

29 ♣ Interprétation du coefficient de corrélation linéaire

Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ ainsi que X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.
Si X et Y **admettent une variance non nulle**, alors :

- $\rho(X,Y)=1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement croissante de l'autre ;
- $\rho(X,Y)=-1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre ;

⋆

Démonstration : Supposons que X et Y admettent une variance non nulle.

- Remarquons déjà que :
  Y est presque-sûrement fonction affine de X si, et seulement si, X est presque-sûrement fonction affine de Y.

Petite remarque
Il est indispensable d'avoir travaillé la démonstration précédente pour comprendre celle-ci. En effet, la présente démonstration utilise une partie du raisonnement mis en place dans QC28.

En effet :

- ⋆ si Y est presque-sûrement fonction affine de X, alors il existe deux réels a, b tels que $\mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$.
Montrons que $a \neq 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a = 0$.
Dans ce cas :
$$\mathbb{P}([Y = b]) = 1$$
Autrement dit, la variable aléatoire Y est presque-sûrement constante ; et donc de variance nulle : ce qui contredit l'hypothèse initiale. Par conséquent : $a \neq 0$.
On obtient alors :
$$\mathbb{P}\left(\left[X = \frac{1}{a}Y - \frac{b}{a}\right]\right)$$
La variable aléatoire X est donc presque-sûrement fonction affine de Y.
- ⋆ De manière analogue (ou par symétrie des rôles de X et Y).

Dans la suite, établissons donc les résultats dans le cas de Y fonction affine de X.

- Ensuite :
$$\begin{aligned} |\rho(X,Y)| = 1 & \iff \rho(X,Y)^2 = 1 \\ & \iff \left(\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right)^2 = 1 \\ & \iff \frac{\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)} = 1 \qquad \text{$\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ sont non nulles} \\ & \iff \big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \end{aligned}$$
Par conséquent :

$\lvert\rho(X,Y)\rvert = 1$	si, et seulement si,	il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz
	si, et seulement si,	le discriminant de $t \longmapsto \mathbb{V}(tX+Y)$ est nul (voir démo précédente)
	si, et seulement si,	$t \longmapsto \mathbb{V}(tX+Y)$ possède une unique racine
	si, et seulement si,	il existe un unique réel α tel que $\mathbb{V}(\alpha X + Y) = 0$
	si, et seulement si,	il existe un unique réel α tel que la variable aléatoire $\alpha X + Y$ est presque-sûrement constante
	si, et seulement si :	$\exists! \alpha, b \in \mathbb{R} \ / \ \mathbb{P}([\alpha X + Y = b]) = 1$
	si, et seulement si :	$\exists! a, b \in \mathbb{R} \ / \ \mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$

Considérons ensuite deux tels réels a et b. On a ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :
$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) & = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ & = \mathbb{E}\big(X(aX+b)\big) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(aX+b) \qquad \mathbb{P}([Y = aX+b]) = 1 \\ & = a\mathbb{E}(X^2) + b\mathbb{E}(X) - a\mathbb{E}(X)^2 - b\mathbb{E}(X) \qquad \text{linéarité de l'espérance} \\ & = a\big(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\big) \\ & = a\mathbb{V}(X) \qquad \text{formule de Koenig-Huygens} \end{aligned}$$
Et ainsi :
$$\rho(X,Y) = \frac{a\mathbb{V}(X)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$
Enfin, puisque $\mathbb{V}(X) \geq 0$, $\sigma(X) > 0$ et $\sigma(Y) > 0$, on obtient que $\rho(X,Y)$ est du signe de a.

Peut être utile...
$\mathbb{P}([X = Y]) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$

Conclusion : $|\rho(X,Y)| = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine de l'autre ; et, dans ce cas, le coefficient dominant de la fonction affine est du signe de $\rho(X,Y)$.

⋆

30 ♥ Méthode d'inversion pour la loi exponentielle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0;1[\big)$, alors $\dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

⋆ Démonstration : Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0;1[\big)$ et notons $Y = \dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-X)$. Notons également $h : x \longmapsto \dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-x)$, définie sur $[0;1[$; ainsi que F_Y la fonction de répartition de Y.

- On a :
$$\begin{aligned} Y(\Omega) & = \big(h(X)\big)(\Omega) \\ & = h\big(X(\Omega)\big) \qquad X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0;1[\big) \\ & = h\big([0;1[\big) \qquad \text{h est continue et strictement croissante sur $[0;1[$} \\ & = [h(0); \lim_{1} h[\qquad \text{car } \lambda > 0 \\ & = [0; +\infty[\end{aligned}$$

★Subtil...★
La continuité permet d'affirmer que $h([0;1[)$ est un intervalle.
En effet : "l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle" (version bis du TVI).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas :
  - ⋆ Si $x < 0$:
On a :
$$\begin{aligned} F_Y(x) & = \mathbb{P}([Y \leq x]) \qquad x < 0 \text{ et } Y(\Omega) = [0; +\infty[\\ & = \mathbb{P}(\varnothing) \\ & = 0 \end{aligned}$$
  - ⋆ Si $x \geq 0$:
On a :
$$\begin{aligned} F_Y(x) & = \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ & = \mathbb{P}\left(\left[\frac{-1}{\lambda}\ln(1-X) \leq x\right]\right) \qquad \lambda > 0 \\ & = \mathbb{P}([\ln(1-X) \geq -\lambda x]) \qquad \text{stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ & = \mathbb{P}([1 - X \geq e^{-\lambda x}]) \\ & = \mathbb{P}([X \leq 1 - e^{-\lambda x}]) \\ & = F_X(1 - e^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

Important !
L'argument de **stricte** croissance est indispensable ! En effet, cachée derrière cette égalité de probabilités, il y a une égalité d'ensembles :
$[\ln(1-X) \geq -\lambda x] = [X \leq 1 - e^{-\lambda x}]$.
Et on a, par stricte croissance de l'exponentielle (pour conserver l'équivalence), pour tout $\omega \in \Omega$:
$\ln\big(1 - X(\omega)\big) \geq -\lambda x \iff 1 - X(\omega) \geq e^{-\lambda x}$

Or : $x \geq 0$ et $\lambda > 0$, donc
$$-\lambda x \leq 0$$
D'où par croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
$$\mathrm{e}^{-\lambda x} \leq 1$$
Ainsi :
$$1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \geq 0$$
Et comme $\mathrm{e}^{-\lambda x} > 0$, on a $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} < 1$. D'où :
$$0 \leq 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} < 1$$
Or $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1[)$, d'où :
$$F_X(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$
Par conséquent :
$$F_Y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$
On a finalement obtenu :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
On reconnaît ici la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Or, la fonction de répartition caractérise la loi...
Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

⋆

Petite remarque
On peut ne pas nécessairement détailler cette partie à l'écrit...

☞ Rappel...
La fonction de répartition d'une VA suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ (ou $[0;1[$, ou $]0;1]$, ou $]0;1[$) est :
$$F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

31 ♥ Propriétés de la fonction de répartition associée à $\mathscr{N}(0;1)$

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Supposons que $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$ et notons φ la fonction de répartition de X.

Q1# $\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$

Q2# $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(-x) = 1 - \varphi(x)$

☞ Rappel...
La fonction de répartition de X est la fonction $x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$.

⋆ Démonstration : On rappelle que la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de X. De façon immédiate, φ est paire.

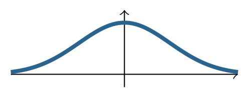
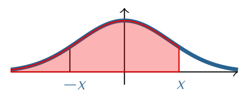
Q1# On a :
$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \mathbb{P}([X \leq 0]) \\ &= \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)dt && \varphi \text{ est une densité de } X \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt && \varphi \text{ est paire} \\ &= \frac{1}{2} && \varphi \text{ est une densité de probabilité} \end{aligned}$$

Q2# Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\varphi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)dt$$
Effectuons le changement de variable $u = -t$:
$$\left| \begin{array}{lcl} u & = & -t \\ t & = & -u \end{array} \right. \quad ; \quad \left| \begin{array}{lcl} du & = & -dt \\ dt & = & -du \end{array} \right. \quad ;$$

$t =$	$-\infty$	$-x$
$u =$	$+\infty$	x

Ce changement de variable est bien licite, puisque la fonction $u \longmapsto -u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[x;+\infty[$. On a ainsi :
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)dt &= \int_{+\infty}^{x} \varphi(-u)(-du) \\ &= \int_{x}^{+\infty} \varphi(-u)du \\ &= \int_{x}^{+\infty} \varphi(u)du && \varphi \text{ est paire} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)du - \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du && \text{relation de Chasles} \\ &= 1 - \Phi(x) && \varphi \text{ est une densité de probabilité} \end{aligned}$$

⋆

Preuve par le dessin !
Q1#

L'aire totale vaut 1, donc par symétrie (parité), l'aire sur $]-\infty;0]$ vaut $\dfrac{1}{2}$.
Q2#


$\varphi(x)$ = aire en rouge. Et par symétrie, on remarque que $\varphi(x) + \varphi(-x) = 1$.

★Subtil...★
Si on pose $u = g(t)$, g doit être bijective et c'est la fonction g^{-1} qui doit être $\mathscr{C}^1$...
Pour ne pas se tromper, on devrait toujours poser $t = \ldots$ même si c'est parfois moins naturel !

Important !
Les deux résultats ne reposent que sur le fait que φ est une densité paire !

32 ♥ Loi faible des grands nombres

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes**, **admettant toutes la même espérance** m et **la même variance** σ^2, alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon]\right) = 0$$

Vocabulaire

$\overline{X_n}$ est la **moyenne empirique** de $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Vocabulaire

On dit que la suite $(\overline{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à m.

⋆ DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $\overline{X_n}$ est une somme de variables aléatoires admettant une variance ; elle admet donc une variance et en particulier une espérance. Puis :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{X_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) && \text{linéarité de l'espérance}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) && \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_k)=m\\
&= m
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\overline{X_n}) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) && \text{indépendance de } X_1, X_2, \dots, X_n\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) && \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}(X_k)=\sigma^2\\
&= \frac{1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, licite car $\overline{X_n}$ admet une variance, on a :

$$\mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - \mathbb{E}(\overline{X_n})| \geq \varepsilon]\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\overline{X_n})}{\varepsilon^2}$$

Autrement dit, d'après le point précédent :

$$\mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon]\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

- On a ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon]\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$$

Par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon]\right) = 0$$

Conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon]\right) = 0$$

⋆

33 ♣ SÉRIE LOGARITHMIQUE

Pour tout $x \in [-1;0]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

⋆ DÉMONSTRATION : Soit $x \in [-1;0]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $t \in [x;0]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} t^i && t \neq 1\\
&= \frac{1-t^n}{1-t}
\end{aligned}$$

En intégrant de x à 0, licite car la fonction $t \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$ est polynomiale donc continue sur le segment $[x;0]$:

$$\int_x^0 \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,dt = \int_x^0 \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$$

Or, par linéarité de l'intégrale, on a :

♣ L'idée !

Pour étudier $\sum k x^{k-1}$, on a dérivé $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$... Pour étudier $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$, on primitive $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$...

- ⋆ d'une part :

$$\begin{aligned}\int_x^0 \sum_{k=1}^n t^{k-1}dt &= \sum_{k=1}^n \int_x^0 t^{k-1}dt \quad \text{$k-1\neq -1$}\\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{t^k}{k}\right]_x^0\\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}\end{aligned}$$

✓ Rigueur !
Si on avait $k-1=-1$, alors il faudrait primitiver $t\longmapsto \frac{1}{t}$, qui se primitive différemment...

- ⋆ d'autre part :

$$\begin{aligned}\int_x^0 \frac{1-t^n}{1-t}dt &= \int_x^0 \frac{1}{1-t}dt - \int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt\\ &= \big[-\ln(1-t)\big]_x^0 - \int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt\\ &= \ln(1-x) - \int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) + \int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt$$

- Montrons maintenant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt = 0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

✘ Attention !
Puisque $t\in[x;0]$, t^n n'est pas de signe constant... On va travailler sur la valeur absolue de l'intégrale.

  - ⋆ Par inégalité triangulaire, licite car $x\leq 0$, on a :

$$\left|\int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leq \int_x^0 \left|\frac{t^n}{1-t}\right|dt$$

  Or, pour tout $t\in[x;0]$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{t^n}{1-t}\right| &= \frac{|t^n|}{|1-t|} \quad \text{$1-t>0$}\\ &= \frac{|t|^n}{1-t} \quad \text{$t\leq 0$, donc $|t|=-t$}\\ &= \frac{(-t)^n}{1-t}\end{aligned}$$

  Par conséquent :

$$\left|\int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1-t}dt$$

  - ⋆ Or :

$$\forall t\in[x;0],\ 1-t\geq 1$$

  D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, et comme pour tout $t\in[x;0]$, $(-t)^n\geq 0$, on obtient :

☞ Rappel...
Pour majorer une fraction à numérateur positif, on minore son dénominateur.

$$\forall t\in[x;0],\ \frac{(-t)^n}{1-t}\leq (-t)^n$$

  Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $x\leq 0$:

$$\int_x^0 \frac{(-t)^n}{1-t}dt \leq \int_x^0 (-t)^n dt$$

  - ⋆ Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^0 (-t)^n dt &= \left[-\frac{(-t)^{n+1}}{n+1}\right]_x^0\\ &= \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \quad \text{$0\leq -x\leq 1$, puis croissance de $t\longmapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^+$ et $n+1>0$...}\\ &\leq \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

✘ Attention !
$\lim\limits_{n\to+\infty}(-x)^{n+1}$ ne vaut pas toujours 0 quand $x\in[-1;0]$... D'où la manipulation à prévoir ici.
En revanche, on sait bien que : $\forall x\in[-1;0]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}=0$, que l'on démontre grâce à l'encadrement proposé ici et au théorème d'encadrement...

Des trois points précédents, on déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq \left|\int_{-1}^0 \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Mais, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$. D'où, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt\right|=0$.
Et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt = 0$$

On obtient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\ln(1-x)+\int_x^0 \frac{t^n}{1-t}dt\right) = -\ln(1-x)$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}\right) = -\ln(1-x)$$

Conclusion : pour tout $x\in[-1;0]$, la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

⋆

34 ♠ Réduction de $U{}^tU$

Soit $U=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La matrice $U{}^tU$ est diagonalisable, et semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&a^2+b^2+c^2\end{pmatrix}$.

> **Important !**
> • La matrice $U{}^tU$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
> • La matrice ${}^tUU$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, que l'on assimile à un réel.

⋆ Démonstration : Notons $A=U{}^tU$.

- Remarquons que A est symétrique. En effet :

$$\begin{aligned}{}^tA &= {}^t\left(U{}^tU\right)\\ &= {}^t\left({}^tU\right){}^tU\\ &= U{}^tU\\ &= A\end{aligned}$$

Conclusion : la matrice A est diagonalisable.

- On a :

$$A=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$$

> **Petite remarque**
> On retrouve que A est symétrique...

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{rg}\left(\left(\begin{pmatrix}a^2\\ab\\ac\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ab\\b^2\\bc\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ac\\bc\\c^2\end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \mathrm{rg}\big((aU,bU,cU)\big)\\ &= \mathrm{rg}\big((U)\big) && \text{au moins un des } a,b,c \text{ est non nul}\\ &= 1 && U \text{ est non nul}\end{aligned}$$

> **✘ Attention !**
> Si $x=y=z=0$, alors $\mathrm{rg}\big(xU,yU,zU\big)=0\neq\mathrm{rg}(U)$...

Par conséquent, 0 est valeur propre de A et, par théorème du rang :

$$\dim\big(\ker(A)\big)=2$$

- Ensuite, remarquons que :

$$\begin{aligned}AU &= U{}^tUU\\ &= U(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

Puisque U est non nul, on en déduit que $a^2+b^2+c^2$ est valeur propre de A, et U en est un vecteur propre associé. Notons au passage que, puisque $U\neq 0_{3,1}$, on a $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

> **Petite remarque**
> Je sais que vous n'auriez pas fait ainsi et que l'on peut calculer en utilisant l'expression explicite de A... Mais c'est plus élégant, et si je ne suis pas là pour vous montrer des choses élégantes parfois, à quoi suis-je utile ?!
> **On retient au passage :**
> $${}^tUU=a^2+b^2+c^2$$

- D'après ce qui précède :
  - ⋆ 0 est valeur propre de A et l'espace propre associé à est dimension 2 ; notons une base (V_1,V_2) de cet espace propre (qui est $\ker(A)$) ;
  - ⋆ $a^2+b^2+c^2$ est valeur propre de A et l'espace propre associé est de dimension 1, engendré par U.

La famille (V_1,V_2,U) est ainsi :
  - ⋆ libre car elle est la concaténation de familles libres de vecteurs propres associées à des valeurs propres différentes,
  - ⋆ de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille (V_1,V_2,U) est donc une base de vecteur propre de A.

Conclusion : on retrouve ainsi que la matrice A est diagonalisable et semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&a^2+b^2+c^2\end{pmatrix}$. ⋆

Et si on demande une matrice de passage ?

Pour cela, il faudrait déterminer des vecteurs V_1 et V_2 convenant...

Le travail sur le rang de A nous permet de constater que les vecteurs $\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\c\\-b\end{pmatrix}$ appartiennent à $\ker(A)$.

Puis on en choisit deux de ces trois en guise de V_1 et V_2...

- Si $a\neq 0$: on prend $V_1=\begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}$
- Si $a=0$ et $b\neq 0$: on prend $V_1=\begin{pmatrix}0\\c\\-b\end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}$
- Si $a=b=0$ et $c\neq 0$: on prend $V_1=\begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix}0\\c\\-b\end{pmatrix}$

Petite remarque

On prend les deux que l'on veut si les trois réels a, b, c sont non nuls !

Dans tous les cas, la famille (V_1, V_2) est une famille de $\ker(A)$ qui est :

- ⋆ libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires...
- ⋆ de cardinal 2, égal à la dimension de $\ker(A)$.

La famille (V_1, V_2) est donc une base de $\ker(A)$.

Conclusion : on choisit alors comme matrice P la matrice de passage de la base canonique vers la base (V_1, V_2, U) ainsi construite, de sorte que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}$.

35 ♠ Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice compagnon

Soient $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ainsi que $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q1# Les valeurs propres de C sont les racines du polynôme $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$.

Q2# Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$, l'espace propre $E_\lambda(C)$ est de dimension 1 et engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

☞ Pour info...

On peut démontrer (même avec les outils d'ECG) que ce polynôme est le plus petit (au sens du degré) polynôme unitaire (coefficient dominant égal à 1) qui soit annulateur de C.

⋆ Démonstration :

Q1# Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\big(\lambda \text{ est valeur propre de } C\big) \iff \mathrm{rg}(C - \lambda I_3) < 3$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(C-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{C_2 \leftrightarrow C_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_0 & -a_2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + a_1 L_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 1 \\ 0 & -a_0 - a_1\lambda & -a_2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{C_3 \leftrightarrow C_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & -a_2-\lambda & -a_0 - a_1\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + (a_2+\lambda)L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

♣ Méthode !

Les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes conservent le rang.
On cherche donc à échelonner la matrice grâce à ces opérations pour déterminer une CNS pour que son rang ne soit pas maximal.
Attention : on veille toujours à ce que le pivot choisi soit non nul...

Mais, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure ; elle est donc de rang maximal si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(C-\lambda I_3) < 3 &\iff -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \\
&\iff \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0
\end{aligned}$$

Conclusion : les valeurs propres de C sont les racines du polynôme $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$.

Q2# Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$.

- Remarquons que, puisque les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \\ -a_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2\lambda \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, la matrice $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2-\lambda \end{pmatrix}$ est au moins de rang 2.
- Mais λ est valeur propre de C, donc la matrice $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas de rang 3.

Petite remarque

Cette remarque pouvait également être faite à partir de sa réduction sous forme de matrice triangulaire à l'étape précédente...

On en dédit que $\mathrm{rg}(C - \lambda I_3) = 2$ et ainsi, par théorème du rang :

$$3 = rg(C - \lambda I_3) + \dim\big(\ker(C - \lambda I_3)\big)$$

Autrement dit :

$$\dim\big(\ker(C - \lambda I_3)\big) = 1$$

On remarque ensuite que :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

question précédente

♣ Indication...

On cherche une matrice dans $\ker(C - \lambda I_3)$... On regarde les deux premières lignes de la matrice $C - \lambda I_3$, qui suggèrent la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$...

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $\ker(C-\lambda I_3)$ qui est :

- ⋆ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
- ⋆ de cardinal 1, égal à la dimension de $\ker(C-\lambda I_3)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}\right)$ est donc une base de $\ker(C-\lambda I_3)$.

Conclusion : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$, l'espace propre $E_\lambda(C)$ est de dimension 1 et engendré par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$.

☞ **Pour info...**
Des deux points, on déduit que la matrice C est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$ admet trois racines distinctes...

⋆

36 ♣ Expression de $\mathbb{E}(X)$ où X est à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, X admet une densité f_X continue sur $\mathbb{R}^+$ et X admet une espérance ; alors : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big([X>t]\big)\,dt$ est convergente et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big([X>t]\big)\,dt$.

⋆ Démonstration : Supposons que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, que X admet une densité f_X continue sur $\mathbb{R}^+$ et que X admet une espérance.
Notons F_X la fonction de répartition de X.
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}\big([X>t]\big) = 1 - F_X(t)$. Or F_X est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1-F_X(t)\big)\,dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.

- Soit $B \in \mathbb{R}^+$.
  Posons : $\left|\begin{array}{l} u : t \longmapsto 1 - F_X(t) \\ v : t \longmapsto t \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;B]$ (F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, comme primitive de f_X, qui est continue sur $\mathbb{R}^+$) et pour tout $t \in [0;B]$: $\left|\begin{array}{l} u'(t) = -f_X(t) \\ v'(t) = 1 \end{array}\right.$.
  Par intégration par parties, on obtient :
$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^B \big(1-F_X(t)\big)\,dt & = & \big[t\big(1-F_X(t)\big)\big]_0^B - \displaystyle\int_0^B -t f_X(t)\,dt \\ & = & B\big(1-F_X(B)\big) + \displaystyle\int_0^B t f_X(t)\,dt \end{array}$$

- Ensuite :
  - ⋆ on sait déjà que X admet une espérance, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ converge et, puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, on a : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t f_X(t)\,dt$.
  - ⋆ Démontrons donc : $\lim\limits_{B\to+\infty} B\big(1-F_X(B)\big) = 0$.
    Soit $B \in \mathbb{R}^+$. On a :
$$\begin{array}{rcl} B\big(1-F_X(B)\big) & = & B\,\mathbb{P}\big([X>B]\big) \\ & = & B\displaystyle\int_B^{+\infty} f_X(t)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_B^{+\infty} B f_X(t)\,dt \end{array}$$
    Pour commencer :
$$\forall t \in [B;+\infty[,\ B \leq t$$
    D'où, puisque f_X est positive sur $\mathbb{R}$:
$$\forall t \in [B;+\infty[,\ B f_X(t) \leq t f_X(t)$$
    Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $B < +\infty$:
$$\int_B^{+\infty} B f_X(t)\,dt \leq \int_B^{+\infty} t f_X(t)\,dt$$
    On a donc établi :
$$0 \leq B\big(1-F_X(B)\big) \leq \int_B^{+\infty} t f_X(t)\,dt$$
    Autrement dit, par relation de Chasles, licite car $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ est convergente et que $B \geq 0$:
$$0 \leq B\big(1-F_X(B)\big) \leq \int_0^{+\infty} t f_X(t)\,dt - \int_0^B t f_X(t)\,dt$$
    Par passage à la limite quand $B \to +\infty$ on obtient, par théorème d'encadrement :
$$\lim_{B\to+\infty} B\big(1-F_X(B)\big) = 0$$

➠**Réflexe !**
On veut démontrer qu'une quantité positive tend vers 0... on pense au théorème d'encadrement !
Et pour majorer une intégrale, on commence par majorer l'intégrande.

On obtient finalement :

$$\lim_{B\to+\infty}\int_0^B \big(1-F_X(t)\big)\,dt = \int_0^{+\infty} t f_X(t)\,dt = \mathbb{E}(X)$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big([X>t]\big)\,dt$ est convergente et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big([X>t]\big)\,dt$.

Petite remarque — On met en parallèle cet exercice avec l'exercice 25 du travail estival...

⋆

37 — La fameuse somme...

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Petite remarque — Bien entendu, puisque le résultat est donné, on peut aussi procéder par récurrence...

⋆ Démonstration : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Considérons la fonction $f : x\longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

- La fonction f est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par linéarité de la dérivation :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

- On sait également que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

En dérivant sous cette forme, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

♡ Astuce du chef ! ♡ — Pour simplifier les calculs, on n'utilise volontairement pas l'autre formule de somme géométrique donnant directement $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x^k$... On ne met pas non plus sur même dénominateur !

On a ainsi :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.

⋆

38 — Indice de nilpotence d'un endomorphisme

Soient E un espace vectoriel de dimension finie notée n et f un endomorphisme de E.
On suppose qu'il existe $k\in[\![2;+\infty[\![$ tel que : $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{k-1}\neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Dans ce cas : $k\leq n$.

Confusion d'objets ! — On rappelle que, lorsqu'il s'agit d'endomorphismes, f^k désigne $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{k\text{ fois}}$.

⋆ Démonstration :

- Puisque f^{k-1} n'est pas l'endomorphisme nul, il existe un vecteur $x\in E$ tel que $f^{k-1}(x)\neq 0_E$.
  Considérons donc un tel x et montrons que la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\big)$ est libre.
  Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\in\mathbb{R}$. Supposons que $a_0x + a_1f(x)+\ldots+a_{k-1}f^{k-1}(x) = 0_E$ et notons $(\star)$ cette égalité.
  - ⋆ En appliquant f^{k-1} à cette égalité, on obtient, par linéarité de f^{k-1} :

$$a_0f^{k-1}(x)+a_1f^k(x)+\ldots+a_{k-1}f^{2k-2}(x) = 0_E$$

Puisque $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a aussi, par récurrence immédiate :

$$\forall i\in[\![k;+\infty[\![,\ f^i = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

D'où :

$$a_0f^{k-1}(x) = 0_E$$

Et puisque $f^{k-1}(x)\neq 0_E$, on obtient :

$$a_0 = 0$$

- ⋆ Par conséquent, l'égalité (⋆) devient :
$$a_1 f(x) + \ldots + a_{k-1} f^{k-1}(x) = 0_E \qquad (\star)$$
Puis, en appliquant f^{k-2} à cette égalité, on va obtenir, de façon analogue :
$$a_1 = 0$$
- ⋆ Et en réitérant, on obtiendra successivement $a_2 = 0$, puis $a_3 = 0$,..., jusqu'à $a_{k-2} = 0$. Restera alors :
$$a_{k-1} f^{k-1}(x) = 0_E$$
Et comme $f^{k-1}(x) \neq 0_E$, on aura $a_{k-1} = 0$.

On a donc établi :
$$\forall i \in [\![0; k-1]\!], \ a_i = 0$$
La famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\big)$ est donc libre.

- Puisque $\big(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\big)$ est libre, on a :
$$\mathrm{Card}\big(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\big) \leq \dim(E)$$
Autrement dit :
$$k \leq n$$

⋆

☞ Rappel...
- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
- Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \geq \dim(E)$.

Petite remarque
On peut bien évidemment adapter la démonstration dans le cas d'une matrice...

39 ♠ Une convergence en loi...

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0; 1]$. Dans ce cas, la suite $\big(n \min(X_1, \ldots, X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

⋆

Démonstration :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $Y_n = n \min(X_1, \ldots, X_n)$ et F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}\big([Y_n \leq x]\big)\\
&= \mathbb{P}\big([n \min(X_1, \ldots, X_n) \leq x]\big)\\
&= \mathbb{P}\left(\left[\min(X_1, \ldots, X_n) \leq \frac{x}{n}\right]\right) && n > 0\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[\min(X_1, \ldots, X_n) > \frac{x}{n}\right]\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \left[X_k > \frac{x}{n}\right]\right)\\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\left[X_k > \frac{x}{n}\right]\right) && X_1, .., X_n \text{ sont indépendantes}\\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \mathbb{P}\left(\left[X_k \leq \frac{x}{n}\right]\right)\right) && X_1, \ldots, X_n \text{ ont même loi et on note } F \text{ leur fonction de répartition commune}\\
&= 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n\\
&= \begin{cases} 1 - (1-0)^n & \text{si } \frac{x}{n} < 0\\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } \frac{x}{n} \in [0; 1]\\ 1 - (1-1)^n & \text{si } \frac{x}{n} > 1 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n]\\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}
\end{aligned}$$

- Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x < 0$:
  On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ F_{Y_n}(x) = 0$. D'où :
  $$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 0$$
  - ⋆ Si $x \geq 0$:
  Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, il existe un rang n_0 (on peut prendre $n_0 = \lfloor x \rfloor + 1$ par exemple...), que nous considérons ensuite, tel que :
  $$\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![, \ n \geq x$$
  Ainsi :
  $$\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![, \ F_{Y_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
  Or, pour tout $n \geq n_0$, $1 - \frac{x}{n} > 0$ (car $n_0 > x$). Et on a donc :
  $$\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![, \ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$$
  Mais :

Petite remarque
On peut choisir de commencer par réfléchir à l'ensemble image de Y_n... Sans mal, on trouve $Y_n(\Omega) \subset [0; n]$, ce qui nous guide ensuite pour la disjonction de cas. Je choisis ici une autre présentation, pour vous montrer comment on peut également procéder.

☞ Rappel...
La fonction de répartition d'une VA suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$ (ou $[0; 1[$, ou $]0; 1]$, ou $]0; 1[$) est :
$$F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ x & \text{si } x \in [0; 1]\\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

♡ Astuce du chef ! ♡
Il faut être attentif quand on rédige sans procéder au préalable à la disjonction de cas sur x... C'est au moment de "remplacer" qu'on doit veiller à **remplacer bêtement** !!

Petite remarque
De façon générale, on quantifie x sur l'ensemble sur lequel la fonction de répartition de la loi limite est continue. Ici, comme il s'agit d'une loi exponentielle, on sait que la fonction de répartition associée est continue sur $\mathbb{R}$.

♣ Méthode !
- Les cas sont les mêmes que dans l'expression de la fonction de répartition de la loi limite...
- Si on ne connaît pas la loi limite, on peut "passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans les intervalles des cas de F_{Y_n} pour voir"...

◇ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-x}{n} = 0$,

◇ $\ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{o}(u)$

D'où :

$$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = \frac{-x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Et ainsi :

$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x$$

Par continuité de l'exponentielle en $-x$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x}$$

Et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1-\mathrm{e}^{-x}$$

On a donc établi :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Conclusion : la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. ⋆

✓ Rigueur !
On utilise un DL d'ordre 1 plutôt qu'un équivalent, qui poserait souci dans le cas $x = 0$.
Deux possibilités donc :
• contourner le souci en utilisant un DL, comme fait ici ;
• inclure le cas "$x = 0$" dans le cas "$x < 0$", puisque $F_{Y_n}(0) = 0$...

40 ♠ Parties entière et fractionnaire d'une VA suivant une loi exponentielle

Soient $\lambda\in\mathbb{R}_*^+$, $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

Q1# Si $X\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$, alors $\lfloor X\rfloor+1\hookrightarrow\mathcal{G}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)$.

Q2# Si $X\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$, alors $X-\lfloor X\rfloor$ est à densité, de densité la fonction $f : x\longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } x\in]0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

⋆ Démonstration :

Q1# Supposons que X suit la loi exponentielle de paramètre λ. Notons $Y = \lfloor X\rfloor$.

- Déterminons la loi de Y.
  - ⋆ Puisque $X\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$, on considère $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$. Ainsi :
  $$Y(\Omega)=\mathbb{N}$$
  - ⋆ Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([Y=n]\right) &= \mathbb{P}\left([\lfloor X\rfloor=n]\right)\\ &= \mathbb{P}\left([n\leq X<n+1]\right)\\ &= F_X(n+1)-F_X(n) \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}\right)-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda n}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda n}-\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}\\ &= \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^n\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)\end{aligned}$$
  X est à densité et on note F_X sa fonction de répartition
  $n, n+1\geq 0$

☞ Rappels...
Deux rappels sur la partie entière :
• $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{Z}$, $\lfloor x\rfloor = k \iff k\leq x<k+1$
• $\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$

- Déduisons alors la loi de $Y+1$.
  - ⋆ Puisque $Y(\Omega)=\mathbb{N}$, on en déduit $(Y+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
  - ⋆ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([Y+1=n]\right) &= \mathbb{P}\left([Y=n-1]\right)\\ &= \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)\end{aligned}$$
  point précédent, licite car $n-1\in\mathbb{N}$ (car $n-1\in\mathbb{N}^*$)

  Par conséquent : $Y+1\hookrightarrow\mathcal{G}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)$.

Conclusion : $\lfloor X\rfloor+1\hookrightarrow\mathcal{G}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)$.

Q2# Supposons que X suit la loi exponentielle de paramètre λ. Notons $Z = X-\lfloor X\rfloor$.

- On sait que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$$
Ainsi :
$$\forall\omega\in\Omega,\ 0\leq Z(\omega)<1$$
D'où :
$$Z(\Omega)\subset[0;1[$$
- Notons F_Z la fonction de répartition de Z. Soit $x\in\mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x<0$:
  $$\begin{aligned}F_Z(x) &= \mathbb{P}\left([Z\leq x]\right)\\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0\end{aligned}$$
  $Z(\Omega)\subset[0;1[$ et $x<0$

⋆ Si $x \geq 1$:

$$\begin{array}{rcl} F_Z(x) & = & \mathbb{P}\big([Z \leq x]\big) \\ & = & \mathbb{P}(\Omega) \\ & = & 1 \end{array} \qquad Z(\Omega) \subset [0;1[\text{ et } x \geq 1$$

⋆ Si $x \in [0;1[$:

$$\begin{array}{rcll} F_Z(x) & = & \mathbb{P}\big([Z \leq x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([X - Y \leq x]\big) & \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = n] \cap [X - Y \leq x]\big) & \text{formule des probabilités totales, avec } \big([Y = n]\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ comme système complet d'évènements} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([\lfloor X \rfloor = n] \cap [X \leq n + x]\big) & \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([n \leq X < n+1] \cap [X \leq n + x]\big) & x < 1, \text{ donc } [X \leq n + x] \subset [X < n + 1] \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([n \leq X \leq n + x]\big) & X \text{ est à densité} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big(F_X(n+x) - F_X(n)\big) & n, n + x \geq 0 \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(n+x)}\big) - \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda n}\big)\Big) & \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big(\mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+x)}\big) & \\ & = & \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big(\mathrm{e}^{-\lambda}\big)^n & \\ & = & \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big) \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} & \\ & = & \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} & \end{array}$$

Petite remarque

Il n'est pas nécessaire de mentionner l'argument $\mathrm{e}^{-\lambda} \in]-1;1[$ puisque l'on sait déjà, par la FPT, que la série en jeu est convergente...

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Ensuite :
  - ⋆ La fonction F_X est :
    - ◇ continue sur $]-\infty;0[$ car constante sur cet intervalle,
    - ◇ continue sur $]1;+\infty[$ car constante sur cet intervalle,
    - ◇ continue en 0 car :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F_Z(x) = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

      et continue en 1 car :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} = 1 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} F_Z(x)$$

    Par conséquent, la fonction F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ Par des arguments similaires à la continuité, la fonction F_Z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

  On en déduit que la variable aléatoire Z est à densité et on obtient une de ses densités, notée f_Z en :
  - ⋆ dérivant F_Z sur les intervalles ouverts :
    - ◇ pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f_Z(x) = F_Z'(x) = 0$,
    - ◇ pour tout $x \in]0;1[$, $f_Z(x) = F_Z'(x) = \dfrac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$,
    - ◇ pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f_Z(x) = F_Z'(x) = 0$.
  - ⋆ posant $f_Z(0) = f_Z(1) = 0$.

Petite remarque

On peut également poser $f_Z(0) = \dfrac{\lambda}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$ et $f_Z(1) = \dfrac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$...

Conclusion : Z est à densité et admet pour densité la fonction $f_Z : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

⋆