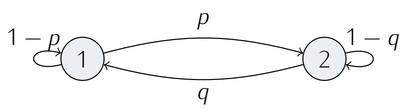
Exercices du chapitre 13
Chaînes de Markov, révisions sur les graphes

●●○○ Exercice 1 - Chaîne de Markov à deux états

Soient $p, q \in [0;1]$. Considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée au graphe suivant, telle que X_0 soit la variable aléatoire constante égale à 1. On note M la matrice de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n son n-ième état probabiliste.



1. Donner la matrice M.
2. Supposons $p = q = 0$.
   - 2.a. Déterminer les états stables de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - 2.b. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n_in\mathbb{N}}$.
3. Supposons $p = q = 1$.
   - 3.a. Déterminer les états stables de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - 3.b. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n_in\mathbb{N}}$.
4. Supposons $p, q \in]0;1[$.
   - 4.a. Démontrer que $(X_n)_{n_in\mathbb{N}}$ possède un unique état stable et le déterminer.
   - 4.b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice A.
   - 4.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.
   - 4.d. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n.
   - 4.e. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

●●○○ Exercice 2 - EML 2023 Sujet 0

On considère trois points A, B, C du plan. L'objectif de l'exercice est l'étude du mouvement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces points.
A l'étape 0, on suppose que le pion est en A. Ensuite, on suppose que le déplacement vérifie les règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "à l'instant n, le pion se situe en A", et l'on définit de la même manière les évènements B_n et C_n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note également $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ le n-ième état probabiliste de cette chaîne de Markov.

Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov étudiée. On la notera M.
2.
   - 2.a. Déterminer a_0, b_0, c_0 ainsi que a_1, b_1, c_1.
   - 2.b. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = V_n \times M$.
   - 2.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = V_0 \times M^n$.

Calcul des puissances de M et applications

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
4. Calculer $A^2 - 5A$. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
5. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
   Calculer la matrice P^{-1}.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. La chaîne de Markov introduite admet-elle un état stable ? Si oui, lequel ?
8. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - 8.a. Démontrer que $M^n = \dfrac{1}{3 \times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$.
   - 8.b. Démontrer que $a_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right)$. Déterminer également b_n et c_n.
   - 8.c. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ce résultat.

Nombre moyens de passage en A et temps d'attente avant le premier passage en B

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire X_n par :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  9.a. Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

  9.b. Calculer l'espérance de X_n.

  9.c. En déduire le nombre moyen de passage en A entre l'instant 1 et l'instant n.

10. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.
Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.

  10.a. Calculer les probabilités $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.

  10.b. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'évènement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$. Justifier que $\mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

  10.c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([T_B = k])$.

  10.d. Reconnaître alors la loi de T_B. Que dire de l'évènement $[T_B = 0]$? Donner l'espérance de T_B et interpréter le résultat obtenu.

●●○○ Exercice 3 - EDHEC 2017

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.
On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}([X_2 = 4]) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3. 3.a. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}\big(\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\big)$$

  3.b. Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

  3.c. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}$$

  3.d. Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. 4.a. En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{3}\big(\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\big)$$

  4.b. En déduire une relation entre $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

  4.c. Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 2]) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = 3]) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4]) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = 4]) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) & \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$$

7. 7.a. Donner la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée A, et expliciter la relation de récurrence sur $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   7.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\, A^n$.
   7.c. En déduire la première ligne de A^n.
8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.
9. Déterminer les états stables de A et étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.
11. 11.a. Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.
    11.b. En déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.
    11.c. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie 4 : informatique

12. 12.a. Écrire un script **Python** dont l'exécution permet l'affichage des 100 premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que du nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements.
    12.b. Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$.
    En quoi est-ce normal ?

●●●● Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $[\![1;r]\!]$, où r est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note A sa matrice de transition.
Pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, on notera $M(i,j)$ le coefficient situé en i-ème ligne et j-ième colonne d'une matrice $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.

1. Supposons que pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, il existe un réel $\mu(j)$, indépendant de i, tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n(i,j) = \mu(j)$. Notons $\mu = \begin{pmatrix} \mu(1) & \dots & \mu(r) \end{pmatrix}$.
   1.a. Démontrer que : $\forall j \in [\![1;r]\!]$, $\mu(j) \geq 0$.
   1.b. Démontrer que μ est un état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   1.c. Soit ν un état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \nu = \nu \times A^n$.
   Démontrer alors que μ est l'unique état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose, dans cette question, que tous les coefficients de A sont strictement positifs. Notons $\delta = \min\left\{A(i,j),\ i,j \in [\![1;r]\!]\right\}$. Pour $j \in [\![1;r]\!]$, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$m_{j,n} = \min\left\{A^n(i,j),\ i \in [\![1;r]\!]\right\} \quad ; \quad M_{j,n} = \max\left\{A^n(i,j),\ i \in [\![1;r]\!]\right\}$$

   2.a. Justifier : $r\delta \leq 1$.
   2.b. Démontrer que, pour tout $j \in [\![1;r]\!]$, la suite $(m_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(M_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   2.c. Soit $j \in [\![1;r]\!]$. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_{j,n+1} - m_{j,n+1} \leq (1 - r\delta)(M_{j,n} - m_{j,n})$.
   Démontrer alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(M_{j,n} - m_{j,n}\right) = 0$$

   2.d. Que peut-on en déduire sur les suites $(m_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(M_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   2.e. En déduire l'existence d'une matrice $\mu = \begin{pmatrix} \mu(1) & \dots & \mu(r) \end{pmatrix}$ telle que :

$$\forall j \in [\![1;r]\!],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |A^n(i,j) - \mu(j)| \leq (1 - r\delta)^n$$

   2.f. Conclure que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un unique état stable.
3. Cas général. On suppose l'existence d'un entier naturel non nul k tel que tous les coefficients de A^k sont strictement positifs.
   3.a. A quelle matrice peut-on appliquer les résultats de la question 2. ?
   3.b. Conclure.

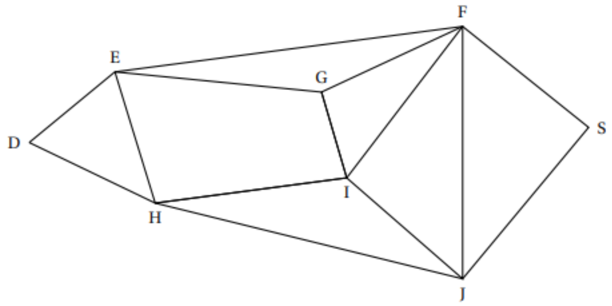
●○○○ Exercice 5 - Vrai / faux

1. Un graphe est non connexe si, et seulement si, il a au moins un sommet isolé.
2. Dans un groupe de vingt enfants, il est impossible que sept d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, neuf d'entre eux en aient exactement 4, et quatre d'entre eux exactement 5.

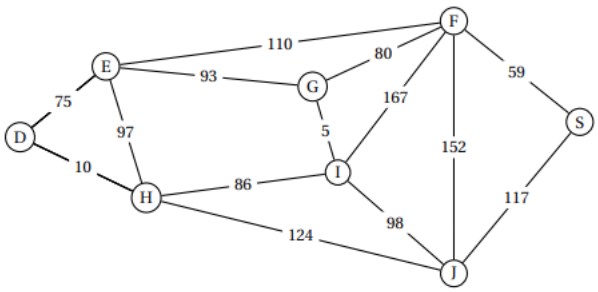
3. Dans un graphe simple et connexe, il existe toujours au moins deux sommets de même degré.

●○○○ Exercice 6 - Cyclisme

Un club cycliste se prépare pour une compétition. Le graphe ci-dessous représente l'ensemble des routes empruntables le jour de la compétition.



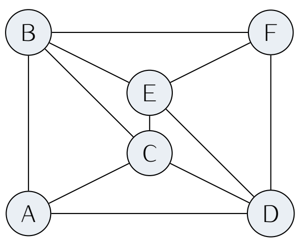
1. Ce graphe est-il connexe ?
2. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule ? Si oui, en donner un.
3. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule avec le même point de départ et d'arrivée ? Si oui, en donner un.
4. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe, notée M.
5. On donne : $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 11 & 8 & 10 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 8 & 6 & 12 & 11 & 7 \\ 3 & 8 & 8 & 4 & 5 & 9 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 12 & 9 & 10 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 11 & 6 & 6 & 9 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
   Un cycliste souhaite aller du point D au point F en empruntant seulement 3 routes. Combien d'itinéraires différents sont possibles ? Les donner tous.
6. Sur le graphe ci-dessous, on a indiqué le temps, en minute, mis par un des cyclistes pour parcourir chacune des routes.



   En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet qu'il doit emprunter pour relier D à S en un temps minimal.

●●○○ Exercice 7

On considère le graphe suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. Ce graphe est-il connexe ?
3. Ce graphe possède-t-il une chaîne eulérienne ?
4. Justifier que ce graphe ne possède pas de cycle eulérien. Quelle arête ajouter pour qu'il en possède un ?

●●○○ Exercice 8 - Connexité 1

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté, simple, d'ordre $2p$ tel que le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à p.
Démontrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

●●●○ Exercice 9 - Connexité 2

Démontrer que dans un graphe simple connexe dont tout sommet est de degré pair, la suppression d'une arête ne détruit pas la connexité du graphe.

●●●○ Exercice 10 - Graphe régulier

On dit qu'un graphe est **régulier** lorsqu'il est simple et que tous ses sommets ont même degré.

1. Que dire de l'ordre d'un graphe régulier dont les sommets sont tous de degré 3 ?
2. Démontrer que pour tout $p \in [\![2; +\infty[\![$, il existe un graphe régulier d'ordre $2p$ dont les sommets sont de degré 3.
3. Écrire une fonction **`Python`** prenant en argument d'entrée la matrice d'adjacence d'un graphe et renvoyant **`True`** s'il est régulier, **`False`** sinon.

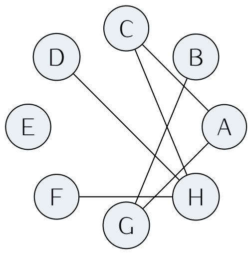
●●●○ Exercice 11 - Graphe aléatoire d'Erdös-Renyi

Toutes les variables aléatoires de l'exercice seront définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $p \in]0;1[$. Pour construire un graphe aléatoire non orienté d'Erdös-Renyi, on se donne :

- un ensemble de sommet $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$,
- une famille de variables aléatoires $(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p,
- des arêtes telles que pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $s_i - s_j$ est une arête du graphe si, et seulement si, $A_{i,j} = 1$.
  Autrement dit, chaque arête possible entre les sommets de $\mathcal{G}$ apparaît avec une probabilité p, de façon indépendante des autres arêtes.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{G}_n$ un tel graphe aléatoire d'ordre n.

1. **Exemple.** Dans le cas $n = 8$ et $p = 0,2$, on a obtenu le graphe suivant :



   Ce graphe est-il connexe ? Si non, combien possède-t-il de composantes connexes ?
2. Quel est le nombre maximal d'arêtes que peut posséder $\mathcal{G}_n$?
3. Écrire une fonction **`Python`** d'en-tête **`def listeAdj(S,p)`** qui renvoie la liste des listes d'adjacence d'un tel graphe aléatoire ayant **`S`** pour liste de sommets.
4. On pose $X_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}$.
   - 4.a. Quelle est la loi suivie par X_n ?
   - 4.b. Interpréter les valeurs prises par X_n dans le contexte de l'exercice.
   - 4.c. Rappeler $\mathbb{E}(X_n)$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit $k \in [\![1; n]\!]$. On note D_k la variable aléatoire égale au degré du sommet s_k. Déterminer la loi de D_k.
6. On note I_n la variable aléatoire égale au nombre de sommets isolés de $\mathcal{G}_n$. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on note $I_{n,k}$ la variable aléatoire égale à 1 si s_k est isolé, 0 sinon.
   - 6.a. Quelle est la loi de $I_{n,k}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$?
   - 6.b. Montrer que $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_{n,k}$. En déduire $\mathbb{E}(I_n)$.
   - 6.c. Montrer que $I_n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_{n,k} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} I_{n,i} I_{n,j}$.
   - 6.d. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i < j$. Justifier que $\mathbb{P}([I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1]) = (1-p)^{2n-3}$.
     En déduire que $\mathbb{E}(I_n^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$.
7. On suppose désormais que $p = p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, avec $c > 0$ et $c \neq 1$.
   - 7.a. 7.a.i. Écrire une fonction **`Python`** d'en-tête **`I(liste)`** qui prend un argument la liste des listes d'adjacence d'un graphe, et renvoie le nombre de sommets isolés de ce graphe.
     - 7.a.ii. On souhaite estimer l'influence de la valeur de c sur le nombre de sommets isolés. En exécutant le script suivant

```python
liste2c=[0.3,0.5,0.7,1.3,1.5,1.7]
n=1000
res=[]

for c in liste2c:
    s=0
    for k in range(200):
        if I(listeAdj(range(1,n+1),c*np.log(n)/n))==0:
            s+=1
    res.append(s/200)
print(res)
```

on obtient la liste `[0.0, 0.0, 0.0, 0.91, 0.975, 0.99]`.
Quelles conjectures peut-on faire lorsque $c < 1$ et $c > 1$?

7.b. Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs discrètes positives admettant une espérance $\mathbb{E}(Y)$. Soit a un réel strictement positif. Considérons la variable aléatoire Z définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } Y(\omega) \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7.b.i. Établir : $Z \leq Y$.

7.b.ii. Démontrer alors l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}([Y \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

7.c. **7.c.i.** Montrer que $(1-p_n)^{n-1} \sim (1-p_n)^n$ puis que $(1-p_n)^n \sim \dfrac{1}{n^c}$.

7.c.ii. A l'aide de l'inégalité de Markov, déterminer alors les limites de $\mathbb{P}([I_n \geq 1])$ puis $\mathbb{P}([I_n = 0])$ lorsque $n \to +\infty$ dans le cas où $c > 1$.

7.c.iii. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}([I_n = 0]) \leq \dfrac{\mathbb{V}(I_n)}{\mathbb{E}(I_n)^2}$. En déduire que si $c < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([I_n = 0]) = 0$.

7.c.iv. Les conjectures faites à la question 7.a.ii sont-elles valides ?