12

Analyse

Fonctions de deux variables

Introduction...

Les fonctions de deux variables réelles (et plus généralement les fonctions à plusieurs variables) représentent un outil très utilisé dans les domaines tels que l'économie, la santé, la physique... afin de modéliser des phénomènes concrets.
Dans ce chapitre, nous nous limiterons à une rapide étude des fonctions de deux variables : représentations graphiques, continuité, recherche d'extrema.
De façon générale, tout le calcul différentiel et le calcul intégral vus sur les fonctions d'une variable peuvent s'étendre aux fonctions de deux variables : notion de différentielle, intégrales multiples, équations aux dérivées partielles... L'ampleur de la tâche serait considérable si nous devions explorer tous ces aspects. Ces domaines sont relativement récents, essentiellement XIXème et XXème siècle, et comme assez souvent, leur développement mathématique est lié à des nécessités dans d'autres disciplines telles que celles mentionnées ci-dessus.

Pour bien démarrer...

1 # Dans le plan, qu'est-ce le cercle de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$? Le disque fermé de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$? Le disque ouvert de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$?

2 # Revoir l'étude de fonctions...

3 # Définition quantifiée de f continue en un réel a :

4 # Formules de Taylor-Young :

5 # Équivalents et développements limités usuels :

Dans tout ce chapitre, on confondra point du plan et couple de $\mathbb{R}^2$. Si A est le point du plan de coordonnées (x_A, y_A), on écrira $A = (x_A, y_A)$.

I Un peu de topologie dans $\mathbb{R}^2$...

Commençons par représenter quelques ensembles...

Exemple 1

Représentons dans le plan les ensembles ci-dessous :

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq 1\} \;\; ; \;\; E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \big(x \geq 0 \text{ ET } y \leq x\big)\} \;\; ; \;\; E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \big(x \geq y^2\big)\}$$

☞ Rappel...
Le cercle de centre $A = (x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2\}$.

Définition 1 – Distance (HP)

Soit E un ensemble. Une **distance** sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall (x, y) \in E^2,\; d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie)*
- $\forall (x, y) \in E^2,\; \big(d(x, y) = 0 \iff x = y\big)$ *(séparation)*
- $\forall (x, y, z) \in E^3,\; d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire)*

Exemple 2

De façon immédiate, l'application $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 - x_2| \end{array} \right.$ est une distance sur $\mathbb{R}$...

✎ Notation
Puisqu'il s'agit d'une distance entre deux points du plan, on notera souvent $d(A, B)$ la distance entre $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$.

Propriété 1 – Distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$

L'application $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \longmapsto & \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{array} \right.$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Vocabulaire
Elle s'appelle **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^2$.
On retrouve la distance de l'exemple 1 dans le cas de $\mathbb{R}$... et on imagine la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

⋆ Démonstration : Pas très difficile, mais peu d'intérêt... ⋆

☞ Pour info...
Il existe bien d'autres distances sur $\mathbb{R}^2$...

Définition 2 – Boules ouvertes

Soient A un point du plan et $r \in \mathbb{R}_*^+$.
La boule ouverte de centre A et de rayon r, notée $B(A, r)$, est l'ensemble :

$$\{M \in \mathbb{R}^2 \;/\; d(A, M) < r\}$$

Autrement dit :
Dans le plan, $B(A, r)$ est le disque de centre A et de rayon r sans son contour, c'est à dire sans le cercle de centre A et de rayon r.

Définitions 3 - Ensembles ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}^2$

On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

D1# D est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ lorsque :

$$\forall M \in D,\ \exists r > 0 \ /\ B(M, r) \subset D$$

D2# D est un **fermé** de $\mathbb{R}^2$ lorsque $\overline{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

D3# D est un ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que $D \subset B(0, r)$.

En gros... Un ensemble D est un ouvert s'il ne contient aucun point de sa frontière...

☞ Rappel... $\overline{D} = \mathbb{R}^2 \setminus D$ désigne le complémentaire de D dans $\mathbb{R}^2$.

Autrement dit : Un ensemble est borné si on peut l'inclure dans une boule.

Exemples 3

On ne démontre pas ces résultats, sauf le premier...

E1 Une boule ouverte est un ouvert.

E2 Une boule fermée (boule ouverte + contour) est un fermé.

E3 Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$, l'ensemble $[a, b] \times [c, d]$ est fermé et borné.

E4 Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $c < d$, l'ensemble $]a, b[\times]c, d[$ est ouvert.

E5 $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont à la fois ouverts et fermés.

E6 Une boule est bornée.

E7 Une droite n'est pas bornée.

E8 L'ensemble $\mathbb{R} \times [-1; 2]$ est fermé mais non borné.

E9 $[0; 1]\times]0; 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

II Fonctions de deux variables réelles

II.1 Définition et premiers exemples

Définitions 4 - Fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, applications partielles

D1# On appelle **fonction de deux variables réelles à valeurs réelles** toute application f définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D2# Soit $(x_0, y_0) \in D$. Les applications $f(., y_0) : x \longmapsto f(x, y_0)$ et $f(x_0, .) : y \longmapsto f(x_0, y)$ sont appelées **applications partielles de f en (x_0, y_0)**.

Important ! Les applications partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$!

Exemples 4

E1 La distance euclidienne sur $\mathbb{R}$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles.

E2 Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, la fonction $(x, y) \longmapsto x^n y^m$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, appelée **fonction monôme de deux variables**.
Une **fonction polynomiale sur** $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de fonctions monômes sur $\mathbb{R}^2$.
Les fonctions suivantes sont polynomiales sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \quad ; \quad (x, y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 \quad ; \quad (x, y) \longmapsto 1 + xy \quad ; \quad (x, y) \longmapsto x^2 + x$$

E3 Dans chaque cas, donnons une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ qui soit non nulle et vérifiant les conditions données :

- qui s'annule une infinité de fois :

- qui s'annule sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées :

- qui s'annule sur l'axe des abscisses mais pas sur l'axe des ordonnées, sauf en $(0,0)$:

- qui s'annule sur la première bissectrice :

E4 Les fonctions $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto y$ sont des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$. Elles sont appelées **fonctions coordonnées** ou **projections**.

E5 Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

> ☞ **Rappel...**
> Une somme de termes positifs est nulle ssi tous ses termes sont nuls.

La fonction $(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}^2$.

II.2 Représentations graphiques

Définition 5 – Graphe d'une fonction de deux variables

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. On appelle **graphe de f** l'ensemble :

$$\{(x,y,z) \in D^2 \times \mathbb{R} \ / \ z = f(x,y)\}$$

> **Important !**
> Le graphe d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **une surface dans l'espace**.

Définition 6 – Ligne de niveaux

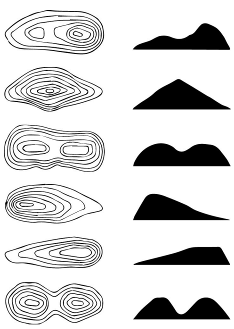
Soient f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau a de f** l'ensemble :

$$\{(x,y) \in D^2 \ / \ f(x,y) = a\}$$

> **Important !**
> Une ligne de niveau d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est soit vide, soit un point, soit une courbe du plan.

Exemples 5

E1 Les amateurs de randonnée sont des habitués des lignes de niveau... Car on trouve sur les cartes ce que l'on appelle des **courbes de niveaux** (ou isohypse d'un point de vue météorologique) : les courbes reliant les points du plan d'égale altitude.



E2 Sur une carte météo, chaque point du globe est associé à un unique couple (x,y) de coordonnées sur cette carte.
La fonction qui à chaque point du globe associe sa pression atmosphérique au sol est une fonction de deux variables réelles.
Ses lignes de niveau sont visibles sur les cartes météo : ce sont les **isobares**.

Voir page 15 pour d'autres exemples et graphiques.

III Continuité des fonctions de deux variables

Définition 7 – Limite finie en un point

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$.
La fonction f admet pour limite le réel ℓ en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall M \in D,\ \Big(d(M, M_0) < \delta \Longrightarrow |f(M) - \ell| < \varepsilon \Big)$$

✎ Notations
On note alors $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$.

Théorème 1 – Unicité de la limite.

Si une fonction de deux variables possède une limite finie en un point, alors cette limite est unique.

Démonstration : Analogue à celle sur les fonctions d'une variable…

Définitions 8 – Continuité d'une fonction de deux variables

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D1# Soit $(x_0, y_0) \in D$. Notons $M_0 = (x_0, y_0)$. La fonction f **est continue en (x_0, y_0)** lorsque $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, autrement dit lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall M \in D,\ \Big(d(M, M_0) < \delta \Longrightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon \Big)$$

D2# On dit que **f est continue sur D** si f est continue en chaque point de D.

Exemples 6

E1 Les fonctions $(x, y) \longmapsto x$ et $(x, y) \longmapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

E2 Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

E3 Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, les applications partielles $f(., y_0)$ et $f(x_0, .)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

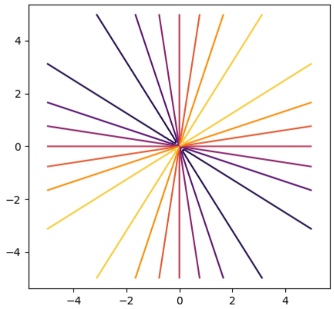
E4 Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

- Les applications partielles de f en 0 sont constantes égales à 0, donc sont continues sur $\mathbb{R}$, et en particulier continues en 0.
- En revanche, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, x) &= \frac{x^2}{x^2 + x^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x) \neq \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent : f ne possède pas de limite en $(0, 0)$, et n'est donc pas continue en $(0, 0)$.
Pour le plaisir, les lignes de niveau de f sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:



Important !
Ne regarder que la limite des applications partielles se résume à arriver en M_0 par la gauche, la droite, le haut et le bas seulement !
Pour qu'une fonction de deux variables soit continue en M_0, il faut $f(M)$ se rapproche de $f(M_0)$ *peu importe la façon dont M se rapproche de M_0*… Et pas seulement selon quelques directions particulières…

Propriétés 2

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ ainsi que f, g une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

P1# Si f est continue sur D, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue sur D.

P2# Si f et g sont continues sur D, alors $f+g$ est continue sur D.

P3# Si f et g sont continues sur D, alors fg est continue sur D.

P4# Si f et g sont continues sur D et que g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.

P5# Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } D \\ f(D) \subset I \\ \varphi \text{ continue sur } I \end{array}\right\} \Longrightarrow (\varphi \circ f \text{ continue sur } D)$$

Petite remarque
Ces propriétés seront encore valables dans le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ sur une partie de $\mathbb{R}^2$, mais avant, il va falloir définir les notions de fonction de deux variables $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$!

⋆ Démonstration : Admises. ⋆

Exemples 7

E1 Considérons la fonction $g : (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$.

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \geq 0$, donc g est définie sur $\mathbb{R}^2$. Ensuite :

- la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^2+y^2$ est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$;
- pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq 0$, donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;
- la fonction $\varphi = \sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Par composition, la fonction $g = \varphi \circ f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

E2 Montrons que l'application $(x,y) \longmapsto \ln(y)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$.

✍ Rédaction
On veillera à détailler soigneusement les continuités des fonctions de deux variables...
On peut d'ailleurs s'inspirer de cette rédaction pour justifier la continuité d'une composée de deux fonctions d'une variable...

À retenir...
Si $g : (x,y) \longmapsto \varphi(y)$, alors en notant $h : (x,y) \longmapsto y$, on a $g = \varphi \circ h$.
Ainsi, si φ est continue sur I, g est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de h continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans I et φ continue sur I.

IV Calcul différentiel

Dans toute cette partie, D désignera un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Pourquoi ?
Pourquoi faut-il ici travailler sur un ouvert ? Explication à l'oral...

IV.1 A l'ordre 1...

Définitions 9 - Dérivées partielles d'ordre 1, gradient

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D1# Soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f **admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en (x_0, y_0)** lorsque l'application $f(., y_0)$ est dérivable en x_0.
On note alors $\partial_1 f(x_0, y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$.

D2# On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D lorsqu'elle en admet une en tout point de D. On note alors $\partial_1 f : (x,y) \longmapsto \partial_1 f(x,y)$ la fonction définie sur D, appelée **dérivée partielle de f d'ordre 1 par rapport à la première variable**.

D3# Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 1 $(x,y) \in D$, on appelle **gradient de f en (x,y)**, noté $\nabla f(x,y)$, la matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

Si f admet des dérivées partielles sur D, on définit alors l'application $\nabla f : (x,y) \longmapsto \nabla f(x,y)$ sur D.

Autrement dit :
f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable lorsque l'application partielle associée est dérivable !

Définition
De la même façon, on définit $\partial_2 f$...

Vocabulaire
- ∂ se lit "d rond"
- le symbole ∇ est appelé "nabla".

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour calculer les dérivées partielles d'ordre 1 :**

- on fixe y et on dérive $x \longmapsto f(x,y)$ par rapport à x pour obtenir $\partial_1 f(x,y)$;
- on fixe x et on dérive $y \longmapsto f(x,y)$ par rapport à y pour obtenir $\partial_2 f(x,y)$.

✍ Rédaction

On fixe y pour calculer $\partial_1 f(x,y)$, mais seulement dans notre tête ! On ne fixe pas y dans la rédaction.

Exemples 8

E1 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^2+xy+e^y$.

- Pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\longmapsto x^2+xy+e^y$ est une fonction polynomiale en x, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$ et :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y)=2x+y$$
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $y\longmapsto x^2+xy+e^y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction affine en y et de la fonction exponentielle.
Ainsi, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$ et :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x,y)=x+e^y$$

E2 Justifions que la fonction $f:(x,y)\longmapsto x^3+2yx^2+x+5xy-2$ possède des dérivées partielles d'ordre 1 et déterminons-les.

Définition 10 – Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur D lorsque les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent et sont continues sur D.

Exemples 9

E1 Les fonctions polynomiales à deux variables sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

E2 Montrons que l'application $f:(x,y)\longmapsto x^2+xy+e^y$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On avait obtenu :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y)=2x+y \quad ; \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x,y)=x+e^y$$
Ainsi :

- $\partial_1 f$ est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$, donc continue sur $\mathbb{R}^2$;
- $\partial_2 f$ est la somme de $(x,y)\longmapsto x$ et de $(x,y)\longmapsto e^y$ toutes deux continues sur $\mathbb{R}^2$, elle est donc également continue sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pourquoi ?

Si on note $g:(x,y)\longmapsto e^y$, on a $g=\varphi\circ h$, où $\varphi: y\longmapsto e^y$ et $h:(x,y)\longmapsto y$.
Puisque h est continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que φ est continue sur $\mathbb{R}$, par composition, g est continue sur $\mathbb{R}^2$/

En pratique, on ne procède pas ainsi, puisque les propriétés 2 sont encore valables dans le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$**, on utilise les théorèmes généraux, comme nous le faisions dans le cas des fonctions d'une seule variable...

Exemple 10

Considérons la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$ par :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R},\ f(x,y)=\exp\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$
Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$.

Important !

On soigne particulièrement ces questions, qui sont généralement situées en début d'exercice ou de partie.

Pour finir sur cette sous-partie :

PROPRIÉTÉ 3

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, alors f est continue sur D.

✘ Attention !
L'existence des dérivées partielles ne garantit pas la continuité ! En effet, on peut encore une fois considérer la fonction étudiée dans Exemples 6 -E4, qui possède des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$, mais qui n'est toujours pas continue en $(0,0)$.
En fait, l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 ne fait que garantir la continuité des applications partielles.

⋆ DÉMONSTRATION : Admise. ⋆

IV.2 A L'ORDRE 2...

Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 1, les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont des fonctions de deux variables définies sur l'ouvert D... On peut donc se demander si elles-mêmes admettent des dérivées partielles d'ordre 1...

DÉFINITIONS 11 - DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE 2, HESSIENNE

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

D1# On dit que **f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur D**, notée $\partial^2_{1,1} f$, lorsque la fonction $\partial_1 f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D.

D2# On dit que **f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première puis la seconde variable sur D**, notée $\partial^2_{2,1} f$, lorsque la fonction $\partial_1 f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D.

D3# Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $(x,y) \in D$, on appelle **hessienne de f en (x,y)**, notée $\nabla^2 f(x,y)$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}$$

Petite remarque
- $\partial^2_{1,1} f = \partial_1(\partial_1 f)$
- $\partial^2_{2,1} f = \partial_2(\partial_1 f)$

Définition
De la même façon, on définit $\partial^2_{2,2} f$ et $\partial^2_{1,2} f$.

Définition 12 - Fonction de classe $\mathscr{C}^2$

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^2$** sur D lorsque les fonctions $\partial^2_{1,1}f$, $\partial^2_{2,1}f$, $\partial^2_{1,2}f$ et $\partial^2_{2,2}f$ existent et sont continues sur D.

Exemple 11

Les fonctions polynomiales à deux variables sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

♣ Méthode 3 ♣ **Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^2$**, on utilise les théorèmes généraux, puisque les propriétés 2 sont encore valables pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$...

On retrouve :

Propriété 4

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

Démonstration : Admise.

Exemples 12

E1 Démontrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminons sa matrice hessienne en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

E2 Démontrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto xe^{-y}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminons sa matrice hessienne en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème 2 - Théorème de Schwarz

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, alors : $\partial^2_{1,2}f = \partial^2_{2,1}f$.
En particulier, la matrice hessienne de f en tout $(x, y) \in D$ est symétrique.

Un peu d'histoire

Il s'agit là encore d'Hermann Schwarz (1843-1921, allemand), et non de Laurent Schwartz (1915-2002, français). En 1734, Euler énonçait que le résultat était toujours valable, sans l'hypothèse de continuité des dérivées partielles d'ordre 2... Schwarz fournit un contre-exemple en 1873 et démontra le théorème.

Démonstration : A notre portée, mais on l'admet tout de même.

IV.3 Développements limités (HP ?)

On rappelle les résultats vus sur les fonctions d'une variable :

Théorème 3 - Formules de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction définie sur I.

T1# Si f est $\mathscr{C}^1$ sur I, alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)\big)$$

Autrement dit, si f est $\mathscr{C}^1$ sur I, alors

$$\forall x \in I,\ \ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
Ou encore (en posant $h = x - a$) on a le $\mathrm{DL}_1(a)$ sous la forme :

$$\text{pour tout } h \text{ tel que } a+h \in I,\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Rappel...

Comme l'avait fait remarquer AG et vu le théorème 3 du chapitre 10, la dérivabilité suffit pour l'existence d'un $\mathrm{DL}_1(0)$.

T2# Si f est $\mathscr{C}^2$ sur I, alors :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^2\big)$$

De la même façon, si f est $\mathscr{C}^2$ sur I, alors :

$$\text{pour tout } h \text{ tel que } a+h \in I,\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \varepsilon(h)h^2$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, on obtient :

Théorème 4 - Formules de Taylor-Young

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \in D$ et f une fonction définie sur D.

T1# Si f est $\mathscr{C}^1$ sur D, alors pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x+h, y+k) \in D$:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\,\nabla f(x,y) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} + \varepsilon(h,k) \times \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{=d\left((h,k),(0,0)\right)}$$

T2# Si f est $\mathscr{C}^2$ sur D, alors pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x+h, y+k) \in D$:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\,\nabla f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})} \cdot \nabla^2 f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \varepsilon(h,k) \times \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}^{\,2}}_{=d\left((h,k),(0,0)\right)^2}$$

Vocabulaire

Dans T1, l'expression trouvée est un $\mathrm{DL}_1((x,y))$; et il s'agit d'un $\mathrm{DL}_2((x,y))$ dans T2.

Petite remarque

- Comme dans le cas des fonctions d'une variable, si f admet DL, alors il est unique ; et c'est donc celui fournit par ce théorème.
- Ne pas hésiter à développer les produits matriciels pour avoir une expression différente, et peut-être préférable ?

Démonstration : Admis.

Comme la tangente à la courbe d'une fonction dérivable, on pourrait définir la notion de plan tangent d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, et on en aurait une équation à partir du DL_1... Cette notion n'est cependant pas au programme. En revanche, que donne le $\mathrm{DL}_2((x,y))$ de f lorsque le gradient de f en (x,y) est nul ?

V Extrema de fonctions de deux variables

V.1 Définitions et premiers exemples

Définitions 13 – Extrema locaux et globaux

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$, $M_0 \in D$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles.

D1# On dit que f admet un **maximum local** en M_0 lorsque :

$$\exists r > 0 \ / \ \forall M \in D \cap B(M_0, r),\ \ f(M) \leq f(M_0)$$

D2# On dit que f admet un **minimum local** en M_0 lorsque :

$$\exists r > 0 \ / \ \forall M \in D \cap B(M_0, r),\ \ f(M) \geq f(M_0)$$

D3# On dit que f admet un **maximum global** en M_0 lorsque :

$$\forall M \in D,\ \ f(M) \leq f(M_0)$$

D4# On dit que f admet un **minimum global** en M_0 lorsque :

$$\forall M \in D,\ \ f(M) \geq f(M_0)$$

Autrement dit : Un maximum local en M_0 est un maximum sur un certain voisinage de M_0.

Petite remarque Comme pour les fonctions d'une variable, un extremum global est en particulier un extremum local et la réciproque est évidemment fausse.

♣ Méthode ! Pour montrer que $f(M_0)$ n'est pas un extremum global, il suffit de trouver un contre-exemple d'un point M tel que $f(M) > f(M_0)$ ou $f(M) < f(M_0)$ selon la nature étudiée.

Confusion d'objets ! M_0 n'est pas l'extremum ! M_0 est un point...

Exemples 13

E1 Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy + 1$, définie sur $\mathbb{R}^2$. En reconnaissant le début d'un carré, démontrons que f possède un minimum global et précisons en quel(s) point(s) il est atteint.

E2 Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

- Démontrons : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \leq \dfrac{1}{2}$.

- Déduisons-en que $\dfrac{1}{2}$ est un maximum global de f et précisons en quel(s) point(s) il est atteint.

Théorème 5 - Théorème des bornes

Si une fonction est continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, alors cette fonction est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.

Autrement dit : Si f est continue sur une partie fermée et bornée, alors f admet un maximum global et un minimum global sur cette partie.

Démonstration : Admis.

V.2 Étude des extrema locaux

Définition 14 - Point critique

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D à valeurs réelles.
On dit que M_0 est un **point critique** de f lorsque $\nabla f(M_0) = 0_{2,1}$.
Autrement dit, (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque $\begin{cases} \partial_1 f(x_0, y_0) = 0 \\ \partial_2 f(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

Important ! Comme dans le cas des fonctions d'une variable, l'hypothèse "D est un ouvert" est fondamentale. En effet, sinon, M_0 pourrait être sur la frontière de D et fournir un extremum local sans pour autant que le gradient soit nul en M_0.

Et, de la même façon qu'on avait ce résultat sur les fonctions d'une variable :

Théorème 6 - Condition nécessaire d'extrema local sur un ouvert

Soient ***D* un ouvert** de $\mathbb{R}^2$, $M_0 \in D$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D à valeurs réelles.
Si f admet un extremum local en M_0, alors M_0 est un point critique de f.

En gros... Les points critiques fournissent des extrema locaux possibles.

Démonstration : Admis.

✘ Attention ! Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque est fausse... On pense à la fonction cube pour les fonctions d'une variable.

♣ Méthode 4 ♣ **Pour démontrer qu'un point critique ne fournit pas un extremum local,** on cherche à trouver une direction selon laquelle il serait un minimum et une direction selon laquelle il serait un maximum.

Exemple 14

Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f, puis que f ne possède pas d'extremum local en ce point.

Théorème 7 – Nature des points critiques

Soient **D un ouvert** de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur D à valeurs réelles.

T1# Si (x_0, y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).

T2# Si (x_0, y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).

T3# Si (x_0, y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont **non nulles** et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0).

T4# Si (x_0, y_0) est un point critique de f et que qu'au moins une des valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ est nulle, alors on ne peut pas conclure sur la nature du point critique.

✘ Attention !
Dans les deux premiers cas, **on peut conclure sur un extremum local, pas un extremum global !**

Vocabulaire
On parle alors de **point col** ou **point selle** (de cheval).

⋆ Démonstration : A notre portée, mais on l'admet tout de même... ⋆

♣ Méthode !
Bien entendu, si l'énoncé guide, on se laisse faire !

♣ Méthode 5 ♣ Pour étudier les points critiques d'une fonction f,

1. on s'assure de se placer sur un ouvert et que f est $\mathscr{C}^2$ ($\mathscr{C}^1$ pour les points critiques, $\mathscr{C}^2$ pour étudier leur nature) sur cet ouvert,
2. on recherche les points critiques : ce sont les solutions du système $\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases}$

   Attention : ce n'est presque jamais un système linéaire... Tous les moyens sont bons si ce n'est pas le cas : substitution, disjonction de cas, analyse-synthèse...
3. on détermine la hessienne de f en chacun des points critiques,
4. ensuite on peut déterminer les valeurs propres de chaque hessienne,
5. puis :
   - dans le cas de T1, T2, et T3 on peut conclure directement ;
   - dans le cas de T4, tout est possible...
     - ◇ pour montrer que c'est un point col, on pourra mettre en place la méthode 4 (en calculant éventuellement $f(x_0 + h, y_0 + k)$ explicitement)
     - ◇ pour montrer que c'est un extremum local, on pourra calculer $f(x_0 + h, y_0 + k)$ explicitement ou effectuer un DL_2.
6. pour étudier le caractère global d'un extremum local :
   - pour montrer que f possède un minimum (ou maximum) global en (x_0, y_0), on doit montrer :
     $$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) - f(x_0, y_0) \geq 0$$
     (ou ≤ 0) Là encore, on préfère parfois établir :
     $$\forall (x,y) \in D,\ f(x_0 + x, y_0 + y) - f(x_0, y_0) \geq 0$$
   - pour montrer que $f(x_0, y_0)$ n'est pas un minimum (ou maximum) global, on peut chercher un contre-exemple de point (x_1, y_1) tel que $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$ (ou $f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0)$).

♡ Astuce du chef ! ♡
J'ai bien écrit "on peut déterminer les valeurs propres", pas "on doit"... En effet :
- λ est VP de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ssi $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$
- on rappelle que le produit des racines du polynômes $X^2 - sX + p$ est égal à p et la somme à s...

Ainsi :
- si $ad - bc > 0$, alors les deux VP sont non nulles et de même signe, signe donné par le signe de $a + d$
- si $ad - bc < 0$, alors les deux VP sont non nulles et de signes opposés
- si $ad - bc = 0$, alors au moins une des VP est nulle

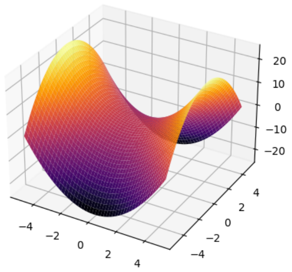
Exemples 15

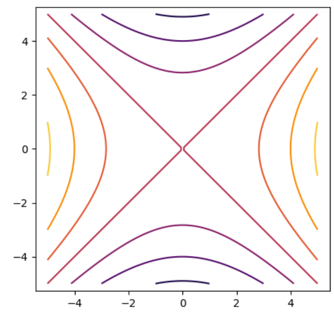
E1 Étudions les points critiques de la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^2 - y^2$.

E2 Démontrons que la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ possède un unique point critique et que f admet un minimum local en ce point critique. Établissons qu'il s'agit même d'un minimum global.

Exemples 16

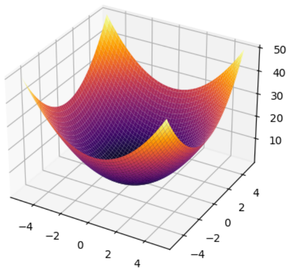
E1 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:

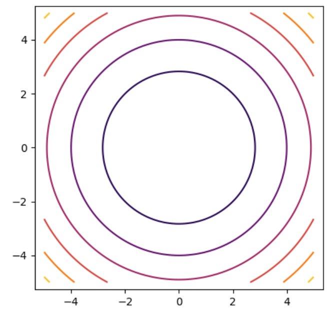




Déterminons les lignes de niveaux 0 et 1 de f.

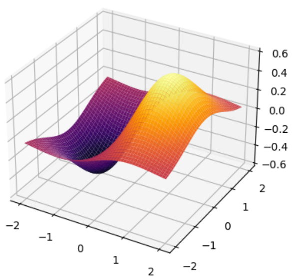
E2 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:

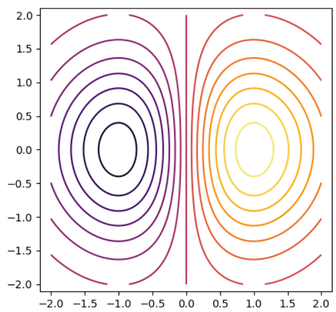




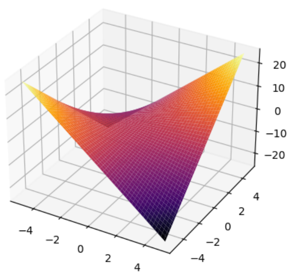
Que dire des lignes de niveaux de f ?

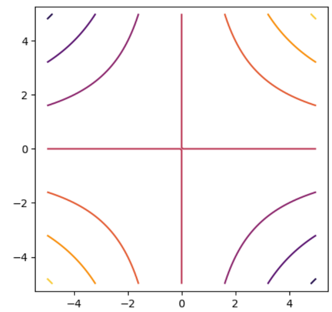
E3 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ sur $[-2; 2] \times [-2; 2]$:





E4 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \longmapsto xy$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:





☞ Pour info...

- Deux lignes de niveau sont soit confondues, soit d'intersection vide.
- Le graphe de f est l'union de toutes ses lignes de niveau.