Exercices du chapitre 12
Fonctions de deux variables

●●○○ Exercice 1

Déterminer les points critiques et leur nature pour chacune des fonctions suivantes.

1. $f:(x,y)\longmapsto x^2+y^2+xy+1$, définie sur $\mathbb{R}^2$
2. $f:(x,y)\longmapsto x^2+y^2+4xy-2$, définie sur $\mathbb{R}^2$
3. $f:(x,y)\longmapsto x^2+2y^2-2xy-2y+1$, définie sur $\mathbb{R}^2$
4. $f:(x,y)\longmapsto x^4+y^3-3y-2$, définie sur $\mathbb{R}^2$
5. $f:(x,y)\longmapsto 2x^3+6xy-3y^2+2$, définie sur $\mathbb{R}^2$
6. $f:(x,y)\longmapsto x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, définie sur $\mathbb{R}^2$
7. $f:(x,y)\longmapsto y\left(x^2+\ln(y)^2\right)$, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$

●●○○ Exercice 2 - EDHEC 2005 E

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x\mathrm{e}^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. 2.a. Déterminer les dérivées partielles premières de f.
   2.b. En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A=(-1,0)$.
3. 3.a. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
   3.b. Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. Préciser sa nature et sa valeur.
4. 4.a. Établir : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\geq x\mathrm{e}^{x}$.
   4.b. En étudiant la fonction $g:x\longmapsto x\mathrm{e}^x$, conclure que l'extremum trouvé en question 2.b. est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

●●○○ Exercice 3 - EDHEC 2021 E

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy$$

1. 1.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   1.b. Déterminer les points critiques de f.
   1.c. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
   1.d. Cet extremum est-il global ?
2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=f(x,1)$$
   2.a. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x)=n$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, possède une unique solution que l'on notera u_n.
   2.b. On note h la restriction de g à $[1;+\infty[$.
      2.b.i. Donner le tableau de variations de h^{-1}.
      2.b.ii. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
      2.b.iii. En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n^\alpha$.

●●○○ Exercice 4 - ESC 2002 E

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, indépendantes, telles que $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,x)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{B}(n,y)$, où x,y sont deux réels de $]0;1[$.
On pose $Z=2n-X-Y$.

1. 1.a. Déterminer $Z(\Omega)$.
   1.b. Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités :
   $$\mathbb{P}([Z=0])\ ,\ \mathbb{P}([Z=2n])\ ,\ \mathbb{P}([Z=2n-1])\ ,\ \mathbb{P}([Z=1])$$
2. 2.a. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$.
   2.b. On pose $W=XYZ$. Justifier que W possède une espérance et que $\mathbb{E}(W)=n^2(n-1)xy(2-x-y)$.
3. On note $D=]0;1[\times]0;1[$ et on considère la fonction $f:(x,y)\longmapsto xy(2-x-y)$, définie sur D.
   3.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.
   3.b. Démontrer que f possède un unique point critique (x_0,y_0) à déterminer.
   3.c. Montrer que f possède un maximum local en (x_0,y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.

3.d. Établir :

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$$

En déduire que ce maximum local est global sur D.

4. Que peut-on alors dire de $\mathbb{E}(W)$?

●●○○ Exercice 5 - EDHEC 2010 E

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x,y) de l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :

$$f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

1. Montrer que, pour tout couple (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a :

$$f(x,y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$$

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
5. 5.a. Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$.

   5.b. En déduire que f admet sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
6. Soit g la fonction définie pour tout (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :

$$g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y)$$

Montrer : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ g(x,y) \geq 2\ln(2)$.

●●○○ Exercice 6 - EDHEC 2015 E

1. Pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$$

1.a. Justifier que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).

1.b. Pour tout réel a positif et tout entier naturel k, on pose : $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a t^k e^{-t}\, dt$.

Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation suivante :

$$I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$$

1.c. En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier : $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

2. Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x,y) de réels, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t}\, dt$ est une intégrale convergente.

On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : (x,y) \longmapsto \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t}\, dt$$

3. 3.a. Vérifier que l'on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.

   3.b. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. 4.a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a,b) de f.

   4.b. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2 f(a,b)$ de f en son point critique.

   4.c. Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2 f(a,b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a,b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.
5. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.

   5.a. Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \ldots$$

   5.b. Compléter de même l'égalité : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{y^2}{2} - 2y + 6 = \dfrac{1}{2}(y-2)^2 + \ldots$

   5.c. En déduire une autre écriture de $f(x,y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

●●○○ Exercice 7 - EML 2015 E

●●○○ Exercice 8 - Ecricome 2000 E

On considère les ensembles :

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq \frac{1}{4},\ y \geq \frac{1}{4},\ x+y \leq \frac{3}{4}\right\} \quad ; \quad T' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > \frac{1}{4},\ y > \frac{1}{4},\ x+y < \frac{3}{4}\right\}$$

On admet que T est une fermé de $\mathbb{R}^2$ et que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note f la fonction définie sur T par : $\forall (x,y) \in T,\ f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x+y}$.

1. Représenter T et T' sur un même graphique.
2. Montrer que f possède un minimum et un maximum sur T.
3. 3.a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur T'.
   3.b. Démontrer ensuite que f n'admet pas d'extremum local sur T'.
4. Justifier que le minimum et le maximum de f sont atteints sur l'ensemble $C = \left\{(x,y) \in T \ / \ x = \dfrac{1}{4} \text{ ou } y = \dfrac{1}{4} \text{ ou } x+y = \dfrac{3}{4}\right\}$.
5. Démontrer, par de simples considérations sur des inégalités, que l'on a pour tout $(x,y) \in T$:
$$2 \leq f(x,y) \leq \frac{16}{3}$$
6. On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u). On suppose que $p \geq \dfrac{1}{4}$, $r \geq \dfrac{1}{4}$, $u \geq \dfrac{1}{4}$ et que $p+r+u = 1$.
   On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement : "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au n-ème tirage".
   On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).
   On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.
   6.a. Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y.
   6.b. Soit i et j des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas $i = j$, $i < j$ et $i > j$, exprimer l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé.
   En déduire la loi du couple (X, Y).
   6.c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   6.d. Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité :
$$\mathbb{P}([D = k]) = \frac{pr}{p+r}\left((1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}\right)$$
   6.e. Montrer que D admet une espérance et que $\mathbb{E}(D) = f(p,r)$. Encadrer alors $\mathbb{E}(D)$.

●●○○ Exercice 9 - HEC 2008 E

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère le nuage de points $\big((x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)\big)$ et on suppose que les réels $x_1,\ldots,x_n$ ne sont pas tous égaux, et qu'il en est de même des réels $y_1,\ldots,y_n$.
On notera $\overline{x}$ la moyenne du n-uplet $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et on définit également $\overline{y}$. On notera aussi σ_x et σ_y les écart-type respectifs.

On considère ensuite la fonction $f : (a,b) \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)^2$.

1. Rappeler l'expression de $\overline{x}$ et σ_x.
2. Justifier que le coefficient de corrélation linéaire du couple (x,y), noté $r(x,y)$, existe et rappeler son expression.
3. Justifier que la fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Démontrer que f possède un unique point critique, noté $(\widehat{a},\widehat{b})$ que l'on exprimera en fonction de $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x^2 et $\mathrm{Cov}(x,y)$.
5. Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f.
6. Établir : $f(\widehat{a},\widehat{b}) = n\sigma_y^2\big(1 - r(x,y)^2\big)$.
7. En déduire que $|r(x,y)| \leq 1$. Que dire du nuage de points lorsque $|r(x,y)| = 1$?