



11

PROBABILITÉS

CONVERGENCE DE SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES

INTRODUCTION...

Ce chapitre met l'accent sur deux théorèmes fondamentaux en théorie des probabilités et en statistiques : la loi faible des grands nombres et le théorème central limite.

La loi faible des grands nombres est due à Pafnouti Tchebychev (1821-1894, russe) qui la démontra en utilisant une inégalité énoncée par Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878, français) et démontrée par Tchebychev lui-même.

Quant au théorème central limite : des cas particuliers ont d'abord été démontrés par Abraham de Moivre (1667-1754, français) et Laplace, mais concernant la version générale, qui l'a démontrée en premier ? En 1920, il semble que Alexandre Liapounov (1857-1918, russe) et Jarl Waldemar Lindeberg (1876-1932, finlandais) en aient tous deux fourni une démonstration différente. En 1922, Paul Lévy (1886-1971, français) démontre le théorème qui porte son nom, dont le TCL est une conséquence immédiate, et permet ainsi à Lindeberg d'en donner une version avec des hypothèses amoindries ! Comme bien souvent, ce théorème est le fruit de collaborations plus ou moins volontaires entre des mathématiciens d'époques et de nationalités variées.

Il est important de noter que l'Histoire se rapproche ! Nous sommes à présent au début du XX^{ÈME} siècle, qui demeurera sans aucun doute le siècle de l'essor des probabilités comme branche légitime des mathématiques.

POUR BIEN DÉMARRER...

1 # Revoir tous les chapitres de probabilités depuis la 1A...

2 # Pour rappel :

	VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES	VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ
Donnée de la loi de probabilité	$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et on donne la <i>fonction de masse</i> : <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbb{P}(\{X = n\})$ pour tout $n \in X(\Omega)$ • $\mathbb{P}(\{X = n\}) = 0$ pour tout n en dehors de $X(\Omega)$ • On a : $\sum_{n \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = n\}) = 1$ 	$X(\Omega)$ est un intervalle (ou union d'intervalles) de \mathbb{R} et on donne une <i>fonction de densité</i> : <ul style="list-style-type: none"> • f_X est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points • f_X est positive sur \mathbb{R} • $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt$ est convergente et vaut 1
Calculs de probabilités	<ul style="list-style-type: none"> • $\mathbb{P}(\{a \leq X \leq b\}) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ a \leq n \leq b}} \mathbb{P}(\{X = n\}) = F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}(\{X = a\})$ • $\mathbb{P}(\{X \leq b\}) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ n \leq b}} \mathbb{P}(\{X = n\})$ • $\mathbb{P}(\{X \geq a\}) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ n \geq a}} \mathbb{P}(\{X = n\})$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\mathbb{P}(\{a \leq X \leq b\}) = \int_a^b f_X(t) dt = F_X(b) - F_X(a)$ • $\mathbb{P}(\{X \leq b\}) = \int_{-\infty}^b f_X(t) dt$ • $\mathbb{P}(\{X \geq a\}) = \int_a^{+\infty} f_X(t) dt$ • $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$; $\mathbb{P}(\{X < b\}) = \mathbb{P}(\{X \leq b\})$; $\mathbb{P}(\{X > a\}) = \mathbb{P}(\{X \geq a\})$
Propriétés de la fonction de répartition F_X	<ul style="list-style-type: none"> • F_X est constante par morceaux • F_X est discontinue en chaque $n \in X(\Omega)$ • le saut de continuité en n est égal à $\mathbb{P}(\{X = n\})$ • $\forall n \in X(\Omega), \mathbb{P}(\{X \leq n\}) - \mathbb{P}(\{X \leq n-1\}) = \mathbb{P}(\{X = n\})$ 	<ul style="list-style-type: none"> • F_X continue sur \mathbb{R} • F_X est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points • pour tout x où F_X est \mathcal{C}^1 : $F'_X(x) = f_X(x)$
Indépendance	Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$: $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\})$	Pour tous intervalles I, J de \mathbb{R} : $\mathbb{P}(\{X \in I\} \cap \{Y \in J\}) = \mathbb{P}(\{X \in I\}) \times \mathbb{P}(\{Y \in J\})$
Espérance (si existence)	<ul style="list-style-type: none"> • X a une espérance ssi $\sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(\{X = n\})$ est convergente • $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(\{X = n\})$ 	<ul style="list-style-type: none"> • X a une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t) dt$ est convergente • $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t) dt$
Théorème de transfert	<ul style="list-style-type: none"> • $g(X)$ a une espérance ssi $\sum_{n \in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}(\{X = n\})$ est convergente • $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{n \in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}(\{X = n\})$ et en particulier : $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n \in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}(\{X = n\})$	Si g est continue sur $X(\Omega)$: <ul style="list-style-type: none"> • $g(X)$ a une espérance ssi $\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t) dt$ est convergente • $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t) dt$ et en particulier : $\mathbb{E}(X^2) = \int_{X(\Omega)} t^2f_X(t) dt$
Variance (si existence)	$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$	
Formule de Keonig-Huygens	$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$	
Propriétés de l'espérance et de la variance	Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. <ul style="list-style-type: none"> • Linéarité de l'espérance. Si X et Y ont une espérance, alors, $aX + bY$ aussi et : $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$. • Croissance de l'espérance. Si X et Y ont une espérance et $\mathbb{P}(\{X \leq Y\}) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. • Si X a une variance, alors $aX + b$ aussi et : $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$. • Si X et Y ont une espérance et sont indépendantes, alors XY a une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Si X_1, \dots, X_n ont une espérance et sont indépendantes, alors $\prod_{k=1}^n X_k$ a une espérance et $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$. <ul style="list-style-type: none"> • Si X et Y ont une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ a une variance et $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Si X_1, \dots, X_n ont une variance et sont indépendantes, alors $\sum_{k=1}^n X_k$ a une variance et $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$.	

3 # On admet que l'on peut définir l'indépendance, l'espérance et la variance pour des variables aléatoires ni discrètes, ni à densité. Puis on admet ensuite que les propriétés énoncées en fin de tableau sont valables dans ce cas de figure.

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace. Sauf précision, les variables aléatoires étudiées seront quelconques (discrètes, à densité ou ni discrète ni à densité).

I INÉGALITÉS DE MARKOV ET BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV

THÉORÈME 1 - INÉGALITÉ DE MARKOV

Si X est à valeurs positives et admet une espérance, alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \mathbb{P}(\{X \geq a\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

* DÉMONSTRATION : Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$.

- Si X est discrète.

On a :

$$\begin{aligned} a\mathbb{P}(\{X \geq a\}) &= a \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} \mathbb{P}(\{X = x\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} a\mathbb{P}(\{X = x\}) && \left. \begin{array}{l} \forall x \geq a, a\mathbb{P}(\{X = x\}) \leq x\mathbb{P}(\{X = x\}) \text{ (car une probabilité est positive)} \\ X \text{ est à valeurs positives} \end{array} \right\} \\ &\leq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} x\mathbb{P}(\{X = x\}) \\ &\leq \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(\{X = x\})}_{=\mathbb{E}(X)} \end{aligned}$$

D'où le résultat, puisque $a > 0$.

- Si X est à densité.

Notons f une densité de X . On a :

$$\begin{aligned} a\mathbb{P}(\{X \geq a\}) &= a \int_a^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_a^{+\infty} af(x) dx && \left. \begin{array}{l} \forall x \geq a, af(x) \leq xf(x) \text{ (car } f \text{ positive) et par} \\ \text{croissance de l'intégrale} \end{array} \right\} \\ &\leq \int_a^{+\infty} xf(x) dx && \left. \begin{array}{l} a > 0 \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}^+, xf(x) \geq 0 \end{array} \right\} \\ &\leq \underbrace{\int_0^{+\infty} xf(x) dx}_{=\mathbb{E}(X), \text{ car } X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+} \end{aligned}$$

D'où le résultat, puisque $a > 0$.

- Dans le cas où X est quelconque, voir QC18.

*

Petite remarque

Selon le programme la connaissance de l'inégalité de Markov n'est pas exigible... Raison de plus pour en connaître au moins une démonstration.

Interprétation

- Si $a \leq \mathbb{E}(X)$, l'inégalité n'apporte rien, car alors $\frac{\mathbb{E}(X)}{a} \geq 1$...
- Le résultat est donc intéressant si a est grand par rapport à $\mathbb{E}(X)$. Dans ce cas, l'inégalité affirme qu'il est peu probable que X prenne des valeurs trop grandes par rapport à $\mathbb{E}(X)$.
- Cette inégalité a l'avantage d'être valable pour toutes les variables aléatoires positives ; avantage : elle est très générale. Inconvénient : la majoration de $\mathbb{P}(\{X \geq a\})$ n'est souvent pas très fine.

EXEMPLES 1

E1 Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre r . Démontrons :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \mathbb{P}(\{|X| \geq \alpha\}) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{\alpha^r}$$

Pour info...

On a même le résultat suivant : si f est une fonction strictement croissante et positive sur un intervalle I , si X est une variable aléatoire à valeurs dans I , alors pour tout $b \in I$ tel que $f(b) > 0$, on a : $\mathbb{P}(\{X \geq b\}) \leq \frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(b)}$.

E2 En appliquant l'inégalité de Markov dans un cas particulier, démontrons :

$$\forall q \in]0; 1[, \forall a \in \mathbb{R}_*^+, q^{[a]}(1 - q) \leq \frac{1}{a}$$

En conséquence de l'inégalité de Markov :

THÉORÈME 2 - INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

Si X admet une variance, alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$

* DÉMONSTRATION :

Rappel...

X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2.

Pour info...

L'inégalité de BT est un cas d'*inégalité de concentration*. Elle permet d'estimer la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa moyenne. Tout comme l'inégalité de Markov, elle est générale mais la majoration fournie n'est pas très fine...

Petite remarque

A α fixé, on voit que plus $\mathbb{V}(X)$ est petite, X aura tendance à être proche de $\mathbb{E}(X)$. La variance traduit bien une mesure de dispersion de la variable aléatoire autour de son espérance.

*

EXEMPLES 2

E1 Lors de l'épreuve de mathématiques organisée par l'EM Lyon, la moyenne des notes est égale à 10 et l'écart-type à 4. On modélise par une variable aléatoire X la note d'un candidat choisi au hasard. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrons que $\mathbb{P}(5 \leq X \leq 15) \geq 0,36$.

On suppose maintenant que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10; 4^2)$. A l'aide de la table de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, déterminons une valeur approchée de $\mathbb{P}(5 \leq X \leq 15)$.

E2 Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Montrons : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

À retenir...

$$\forall p \in]0; 1[, p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

II LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Avant d'énoncer ce célèbre théorème, commençons par deux résultats immédiats sur la moyenne empirique...

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi (espérance notée m et variance notée σ^2).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Justifions que \bar{X}_n possède une espérance et une variance et déterminons-les.

Vocabulaire

\bar{X}_n est la **moyenne empirique** de X_1, X_2, \dots, X_n .

THÉORÈME 3 - LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes**, admettant toutes la **même espérance m** et la **même variance σ^2** (c'est le cas si elles ont toutes la même loi) alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$$

* DÉMONSTRATION : Voir QC32.

Vocabulaire

On dit que la suite $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité (vocabulaire HP) vers la variable aléatoire constante égale à m .

Utile ?

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
 $|\bar{X}_n - m| > \varepsilon \subset |\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon$.
On a donc également :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| > \varepsilon) = 0$

EXEMPLES 3

E1 On considère une variable aléatoire X admettant une espérance et une variance. On suppose l'existence d'une fonction Python nommée `simulX` permettant de simuler une réalisation de X .
A quoi peut-on s'attendre lors de l'exécution du programme suivant ?

```
1 L=[simulX() for k in range(10000)]
2 print(sum(L)/len(L))
```

Petite remarque

Pour une autre application de la LfGN, voir le TP sur la Méthode de Monté-Carlo.

E2 Soit $p \in]0; 1[$. On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes

la même loi $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puisque $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, X_k admet une espérance et une variance et : $\mathbb{E}(X_k) = p$, $\mathbb{V}(X_k) = p(1-p)$.

Ainsi, $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, admettant toutes la même espérance p et la même variance $p(1-p)$. Donc, d'après la loi faible des grands nombres :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) = 0$$

La moyenne empirique des X_k a tendance, quand $n \rightarrow +\infty$, à se rapprocher de p .

C'est ce résultat qui justifie que la probabilité d'un évènement peut être vue comme la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de la fréquence d'apparition de cet évènement sur n répétitions indépendantes de l'expérience en jeu.

En reprenant le contexte de l'exemple précédent, à quoi peut-on s'attendre lors de l'exécution du programme suivant ?

Petite remarque

← C'est le contexte de Exemples 2 - E2.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 L=simulX() for k in range(10000)]
4 Labs=range(min(L),max(L)+1)
5 plt.hist(L,Labs,density=True,edgecolor='k')
6 plt.show()
```

III CONVERGENCE EN LOI

III.1 DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITION 1 - CONVERGENCE EN LOI

Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_X la fonction de répartition de X et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n . On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge en loi vers X** lorsque, **pour tout x où F_X est continue**, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

♣ **MÉTHODE 1** ♣ Pour établir que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$:

- On commence par rappeler (ou déterminer) la fonction de répartition de X et celles de X_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- On fixe x dans \mathbb{R} **sauf en les points de discontinuité de F_X** (si X est à densité, F_X est continue, donc x sera dans \mathbb{R} entier).
- On examine alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x)$. S'il y a des disjonctions de cas **dans l'expression de F_X** , il y aura les mêmes disjonctions de cas dans la démonstration...

EXEMPLES 4

E1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n telle que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$. Montrons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi certaine égale à 0.
A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$? $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X)$?

E2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi exponentielle de paramètre $1 + \frac{1}{n}$. Montrons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Notation

On note $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$... même si on devrait plutôt noter $\mathcal{L}(X_n) \rightarrow \mathcal{L}(X)$.

En effet : ~~$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$~~ . Il n'y a d'ailleurs pas unicité de X : toute variable aléatoire ayant la même loi que X convient. En revanche, il y a unicité de la fonction limite de (F_{X_n}) . Et comme la fonction de répartition caractérise la loi, c'est parfait : il y a unicité de la *loi limite*.

Important !

On examine, à x fixé, la limite de F_{X_n} quand $n \rightarrow +\infty$ (on parle de convergence simple de la suite de fonctions (F_{X_n}) : vocabulaire HP).

♣ Méthode !

Il se peut que l'énoncé soit formulé ainsi "Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi."; la méthode ne change alors pas beaucoup...

E3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$. Montrons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en loi.

E4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi uniforme sur $\left[\frac{-1}{n}; \frac{1}{n}\right]$. Montrons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi certaine égale à 0.

Petite remarque

Les exemples ci-dessus mettent en évidence qu'il n'y a pas toujours convergence en loi ; et que, si convergence, les cas 'discret' → 'discret', 'à densité' → 'à densité' et 'à densité' → 'discret' peuvent se produire. Le cas 'discret' → 'à densité' est également possible...

THÉORÈME 4 - CAS "DISCRET" → "DISCRET" DANS \mathbb{N} .

Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors :

$$(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X) \iff (\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k]))$$

Important !

Toutes les variables aléatoires en jeu doivent être discrètes !

Petite remarque

C'est donc en particulier le cas si les variables aléatoires sont à valeurs dans un sous-ensemble fini de \mathbb{N} (le résultat est en fait valable si les variables aléatoires sont discrètes, non nécessairement à valeurs dans \mathbb{N} ..).

*** DÉMONSTRATION :** Supposons que X ainsi que X_1, X_2, \dots sont à valeurs dans \mathbb{N} . Raisonnons ensuite par double-implication.

\implies Supposons $(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X)$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Puisque X et X_1, X_2, \dots sont à valeurs entières, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k - 1]) \\ &= F_X(k) - F_X(k - 1) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}([X_n \leq k]) - \mathbb{P}([X_n \leq k - 1]) \\ &= F_{X_n}(k) - F_{X_n}(k - 1) \end{aligned}$$

On a envie de passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, mais on ne peut pas ! En effet, puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, la fonction de répartition de X n'est a priori pas continue en k et $k - 1$... Contournons le problème en remarquant que, puisque X_1, X_2, \dots sont à valeurs entières, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_n \leq k]) = \mathbb{P} \left(\left[X_n \leq k + \frac{1}{2} \right] \right) ; \quad \mathbb{P}([X_n \leq k - 1]) = \mathbb{P} \left(\left[X_n \leq k - 1 + \frac{1}{2} \right] \right)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P} \left(\left[X_n \leq k + \frac{1}{2} \right] \right) - \mathbb{P} \left(\left[X_n \leq k - \frac{1}{2} \right] \right) \\ &= F_{X_n} \left(k + \frac{1}{2} \right) - F_{X_n} \left(k - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Or $k + \frac{1}{2}$ et $k - \frac{1}{2}$ n'appartiennent pas à $X(\Omega)$, donc F_X est continue en $k + \frac{1}{2}$ et $k - \frac{1}{2}$. Ainsi, puisque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n} \left(k + \frac{1}{2} \right) = F_X \left(k + \frac{1}{2} \right) ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n} \left(k - \frac{1}{2} \right) = F_X \left(k - \frac{1}{2} \right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) &= F_X \left(k + \frac{1}{2} \right) - F_X \left(k - \frac{1}{2} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\left[X \leq k + \frac{1}{2} \right] \right) - \mathbb{P} \left(\left[X \leq k - \frac{1}{2} \right] \right) \quad \curvearrowright X \text{ est à valeurs entières} \\ &= \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k - 1]) \\ &= \mathbb{P}([X = k]) \end{aligned}$$

Conclusion : $(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X) \implies (\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k]))$.

\impliedby Supposons $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])$. Montrons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que F_X est continue en x . On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}([X_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X_n \leq [x]]) \quad \curvearrowright X_n \text{ est à valeurs entières} \\ &= \sum_{k=0}^{[x]} \mathbb{P}([X_n = k]) \quad \curvearrowright \text{puisque } X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}, \text{ on a } [X_n \leq [x]] = \bigcup_{k=0}^{[x]} [X_n = k]; \text{ puis par incompatibilité des évènements de la famille } ([X_n = k])_{k \in [0; [x]]} \end{aligned}$$

Or : $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$. D'où, par somme :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X = k) && \left. \begin{array}{l} \text{arguments similaires à ce qui précède} \\ \text{X est à valeurs entières} \end{array} \right\} \\ &= \mathbb{P}(X \leq \lfloor x \rfloor) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

D'où la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers X .

★

★ **Subtile...** ★
En fait, nous avons établi $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ pour tous les réels x ... même ceux en lesquels F_X n'est pas continue.

EXEMPLE 5

Voir QC16.

Pour finir cette partie, un dernier exemple, théorique, qui nous sera utile dans la fin du cours...

EXEMPLE 6

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Démontrons :

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \implies (\forall (a, b) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, (aX_n + b) \xrightarrow{\mathcal{L}} (aX + b))$$

III.2 THÉORÈME CENTRAL LIMITE

THÉORÈME 5 - THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes, de même loi**, admettant la même espérance m et la même **variance σ^2 non nulle**.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k ; \quad \bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sigma(\bar{X}_n)} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}$$

Dans ce cas, la suite $(\bar{X}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\bar{X}_n^* \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ou encore :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left(a < b \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq \bar{X}_n^* \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$$

Lorsque n est *suffisamment grand*, on pourra considérer que : $\mathbb{P}(a \leq \bar{X}_n^* \leq b) \simeq \mathbb{P}(a \leq Z \leq b)$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.

Un peu d'histoire
Dans sa toute première version, les variables aléatoires X_1, X_2, \dots suivaient une loi de Bernoulli de paramètre p . Sous cette condition, on parle alors de théorème de Moivre-Laplace. Abraham de Moivre (1667-1754, français) l'a démontré en 1733 dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, puis Laplace dans le cas général au début du XIX^{ème} siècle.

Autrement dit :
Quand on centre et qu'on réduit la moyenne empirique d'une suite de VA iid de variance non nulle, la VA obtenue converge en loi vers une VA suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

★ **DÉMONSTRATION :** Il en existe différentes démonstrations... Dont une très courte, mais hors de portée avec nos outils. D'autres plus longues... On en trouvera une dans la dernière partie du sujet ESSEC II E 2022.

IV APPROXIMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

THÉORÈME 6 - APPROXIMATION D'UNE LOI BINOMIALE PAR UNE LOI DE POISSON

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, alors : la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

En pratique...

Lorsque $0 < np < 10$ (c'est à dire que si n est grand, p doit être petit) on approche la loi $\mathcal{B}(n; p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$.
On voit parfois les conditions : $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$.

* DÉMONSTRATION : Cas particulier de QC16. *

THÉORÈME 7 - APPROXIMATION D'UNE LOI BINOMIALE PAR UNE LOI NORMALE

Soient $p \in]0; 1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Dans ce cas, la suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

* DÉMONSTRATION :

Conséquence : si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$, alors on peut considérer que pour n suffisamment grand, X_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(np; np(1-p))$.

En effet :

avec les notations du théorème 7, la suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

D'après l'exemple 6, on peut donc considérer que pour n grand, la variable aléatoire X_n se comporte comme la variable aléatoire $\sqrt{np(1-p)}Z + np$.

Or $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$, donc $\sqrt{np(1-p)}Z + np \hookrightarrow \mathcal{N}(np; np(1-p))$. D'où le résultat.

En pratique...

Lorsque $n \geq 30, np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ (c'est à dire que si n est grand, p doit être ni trop petit ni trop grand) on approche la loi $\mathcal{B}(n; p)$ par la loi $\mathcal{N}(np; np(1-p))$.
On voit parfois les conditions : $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$.
Notons que l'approximation se fait à espérance et variance constantes.

Petit oubli...

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors $(aX + b)$ suit la loi $\mathcal{N}(a\mu + b; a^2\sigma^2)$.

EXEMPLE 7

On effectue 10000 lancers, supposés indépendants, d'une même pièce donnant PILE avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus. Déterminons une valeur approchée de $\mathbb{P}(X = 5000)$ et $\mathbb{P}(X \in [4900; 5100])$.

✎ Pour info...

En fait, l'approximation peut être rendue meilleure en raisonnant plus finement...
En effet, puisque X est à valeurs dans \mathbb{N} , on a :
 $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(k - 0,5 \leq X \leq k + 0,5)$.
Ainsi : $\mathbb{P}(4900 \leq X \leq 5100) = \mathbb{P}(4899,5 \leq X \leq 5100,5)$.
Et l'approximation est meilleure en utilisant $\mathbb{P}(4899,5 \leq X \leq 5100,5)$. C'est ce que l'on appelle la **correction de continuité**.

THÉORÈME 8 - APPROXIMATION D'UNE LOI DE POISSON PAR UNE LOI NORMALE

Soient $\alpha > 0$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\alpha)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n^* = \frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}$.

Dans ce cas, la suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

* DÉMONSTRATION :

*

Conséquence : si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\alpha)$, alors on peut considérer que pour n suffisamment grand, X_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n\alpha; n\alpha)$.

En effet :

avec les notations du théorème 8, la suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

D'après l'exemple 6, on peut donc considérer que pour n grand, la variable aléatoire X_n se comporte comme la variable aléatoire $\sqrt{n\alpha}Z + n\alpha$.

Or $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$, donc $\sqrt{n\alpha}Z + n\alpha \hookrightarrow \mathcal{N}(n\alpha; n\alpha)$. D'où le résultat.

En pratique...

Lorsque $\lambda \geq 15$ on approche la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.
Là encore, l'approximation se fait à espérance et variance constantes.

Petit oubli...

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors
 $(aX + b) \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b; a^2\sigma^2)$