Exercices du chapitre 10
Étude de fonctions et développements limités

●○○○ Exercice 1 - Recherche de limites

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 puis leur limite en 0 :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - e^x$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{(e^x-1)^2}{x\ln(1+x)}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\ln(1+x)+e^{-x}-1}$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{1}{x}$
6. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$
7. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$

●○○○ Exercice 2

Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en 0.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} x\ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty;0[\cup]0;1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

●○○○ Exercice 3 - Position relative

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x\sqrt{1+x}+1$, définie sur $[-1;+\infty[$, et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. La fonction f est-elle dérivable en -1 ?
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ en précisant la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente au points d'abscisse 0 au voisinage de 0.

●●○○ Exercice 4 - Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. **Formule de Taylor avec reste intégral.**
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$:
$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$
2. **Inégalité de Taylor-Lagrange.**
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$:
$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \ / \ \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
3. **Formule de Taylor-Young.**
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$, pour tout x au voisinage de a :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$