Les Chartreux

10

Analyse

Développements limités des fonctions

Introduction...

Dans ce chapitre, nous verrons les derniers outils d'étude des fonctions d'une variable du programme. Dans le chapitre 4, nous avons introduit les notions d'équivalence et négligeabilité entre fonctions qui nous sont utiles dans l'étude des intégrales impropres ; et l'équivalence de fonctions peut également nous aider dans la recherche des limites d'une fonction.
Quand un équivalent ne suffit pas, ou ne permet pas (s'il s'agit de vouloir les sommer...) de conclure, on peut légitimement se poser de préciser cet équivalent...

Par exemple : $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $e^x - 1 = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$... L'idée est donc parfois de préciser ce " $\underset{x\to 0}{o}(x)$". En effet, ce n'est pas ce qui manque les " $\underset{x\to 0}{o}(x)$", on a par exemple : $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$, mais aussi $x^{\frac{3}{2}}$, x^4, $43x^{17}$...

I Définitions et premières propriétés

Définitions 1 – Développements limités

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a, mais pas nécessairement en a.

D1# Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f admet un **développement limité d'ordre n en a** (ou au voisinage de a) lorsqu'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que, au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

D2# En particulier :

- f admet un **développement limité d'ordre 0 en a** lorsqu'il existe un réel a_0 tel que, au voisinage de a :
$$f(x) = a_0 + \underset{x\to a}{o}(1)$$
- f admet un **développement limité d'ordre 1 en a** lorsqu'il existe des réels a_0, a_1 tels que, au voisinage de a :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)\right)$$
- f admet un **développement limité d'ordre 2 en a** lorsqu'il existe des réels a_0, a_1, a_2 tels que, au voisinage de a :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right)$$

Petite remarque
Seuls les DL à l'ordre 0,1 et 2 sont au programme.

En gros...
- Un $DL_0(a)$ est une approximation de f par une constante, valable au voisinage de a.
- Un $DL_1(a)$ est une approximation de f par une fonction affine, valable au voisinage de a.
- Un $DL_2(a)$ est une approximation de f par une fonction polynomiale de degré 2, valable au voisinage de a.

Exemples 1

E1 On a trivialement : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = 1 + x + (e^x - 1 - x)$.
Or $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc : $e^x - 1 - x = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
Par conséquent :

$$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Conclusion : la fonction exponentielle admet un $DL_1(0)$: $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

☞ Rappel...
$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g = \underset{a}{o}(g)$

E2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

E3 Déterminons $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ puis déduisons-en que la fonction ln admet un $DL_1(1)$.

Théorème 1 – Unicité du développement limité

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a, mais pas nécessairement en a.
Si f admet un $DL_n(a)$, alors celui-ci est unique.

⋆ Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que f possède deux $DL_n(a)$ distincts en a. Il existe alors des réels $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

et :

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Ainsi :

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Puisque ces deux DL sont distincts, il existe au moins un entier $k \in [\![0;n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$. Notons $p = \min\{k \in [\![0;n]\!] \ / \ a_k \neq b_k\}$.
Ainsi, il reste en fait :

$$a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right) = b_p(x-a)^p + b_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

D'où, en particulier :

$$a_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^p\right) = b_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^p\right)$$

Et donc :

$$(a_p - b_p)(x-a)^p = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^p\right)$$

Ce qui implique :

$$\lim_{x\to a} \frac{(a_p-b_p)(x-a)^p}{(x-a)^p} = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to a} (a_p - b_p) = 0$$

Et donc $a_p - b_p = 0$: absurde !

⋆

Pourquoi ?
Pour tous $r, s \in \mathbb{N}$:
$r \geq s \Longrightarrow y^r = \underset{y\to 0}{o}(y^s)$

Avouons que dans 99% des cas, nous chercherons un DL en 0... Alors retenons l'allure des $\mathrm{DL}_1(0)$ et $\mathrm{DL}_2(0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \underset{x\to 0}{o}(x) \quad ; \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Les développements limités précisent en fait les équivalents... et sont nettement plus puissants pour les calculs. En effet, on ne peut sommer ni composer des équivalents ; alors que c'est possible pour les développements limités. En effet, même s'ils ne sont valables qu'au voisinage de a, il n'en demeure pas moins qu'une fonction est *égale* à son DL autour de a. **Lorsqu'un calcul de limite ou d'équivalent n'aboutit pas, on peut tenter un développement limité.** Conformément au programme, aucune théorie ne sera soulevée sur les techniques de calculs des DL, en revanche, on garde en tête que l'**on peut sommer des DL**.

II Formule de Taylor–Young et développements limités usuels

Théorème 2 - Formules de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction définie sur I.

T1# Si f est $\mathscr{C}^1$ sur I, alors f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ et :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)\right)$$

T2# Si f est $\mathscr{C}^2$ sur I, alors f admet un $\mathrm{DL}_2(a)$ et :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right)$$

Petite remarque
Comme nous le verrons dans le théorème 3, la dérivabilité suffit pour l'existence d'un $\mathrm{DL}_1(0)$.

Important !
Les formules de Taylor-Young fournissent deux choses :
- une condition suffisante d'existence d'un DL
- une expression du DL !

⋆ Démonstration : Le cas général d'un $\mathrm{DL}_n(a)$ peut se démontrer par récurrence... ou en application de la formule de Taylor avec reste intégral.

⋆

Exemples 2

E1 Justifions que la fonction exponentielle admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et déterminons-le.

À retenir...
Les DL obtenus dans ces exemples sont à connaître !

Puis, en composant par $x \longmapsto -x$ par la droite, on obtient : $\mathrm{e}^{-x} =$

E2 Justifions que la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et déterminons-le.

E3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifions que la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et déterminons-le.

En particulier :

- si $\alpha = -1$:
- si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$:
- si $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

III Applications des développements limités

III.1 Recherche de limite, d'équivalents et étude de dérivabilité

Théorème 3 - CNS d'existence des $\mathrm{DL}_0(a)$ et $\mathrm{DL}_1(a)$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a.

T1# f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si, et seulement si, f est continue en a ; et le cas échéant :

$$f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$$

T2# Si f n'est pas définie en a, alors : f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si, et seulement si, f admet une limite finie en a ; et le cas échéant :

$$f(x) = \lim_a f + \underset{x\to a}{o}(1)$$

T3# f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si, et seulement si, f est dérivable en a ; et le cas échéant :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)\big)$$

✘ Attention !
Il n'existe pas de CNS simple d'existence d'un $\mathrm{DL}_2(a)$.

Quel scoop !
L'approximation affine d'une fonction au voisinage d'un réel en lequel elle est dérivable est donnée par... la tangente à sa courbe en a !

⋆ Démonstration :

T1# Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$.
Il existe alors $a_0 \in \mathbb{R}$ tel, au voisinage de a : $f(x) = a_0 + \underset{x \to a}{o}(1)$. Autrement dit, il existe une fonction ε de limite nulle en a telle que, au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$$

Mais alors :

- ◇ $f(a) = a_0$ (l'égalité est vraie en a, car f est définie en a)
- ◇ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \big(a_0 + \varepsilon(x)\big) = a_0$ (car $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$)

D'où :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Par conséquent : f est continue en a et on a $f(x) = f(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f est continue en a. On a, pour tout x au voisinage de a (partout en fait) :

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a)$$

Posons alors $\varepsilon : x \longmapsto f(x) - f(a)$ de sorte que, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x)$$

Puisque f est continue en a, on a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. D'où : $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.
Par conséquent : au voisinage de a, $f(x) = f(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$. La fonction f admet ainsi un $\mathrm{DL}_0(a)$.

☞ **Rappel...**
$h = \underset{a}{o}(1) \iff \lim\limits_{a} h = 0$

T2# Démonstration presque identique au premier point...

T3#

⋆

Exemples 3

E1 Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-1}{x^2}$.

E2 Considérons la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- La fonction f est le quotient de deux fonctions continues sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.
  Ainsi, f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
  Aussi, puisque $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :
  $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$$
  Par conséquent :
  $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= 1 \\ &= f(0) \end{aligned}$$
  La fonction f est donc continue en 0, et donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrons maintenant de deux façons différentes que f est dérivable en 0 et déterminons $f'(0)$.

Propriété 1 - Lien DL / équivalent

Si une fonction admet un développement limité en a, alors elle est équivalente en a au premier terme non nul de ce développement limité.

Démonstration : Immédiat.

Pour un équivalent, il ne doit rester qu'un seul terme !

Exemple 4

Donnons un équivalent simple de $\dfrac{e^x - 1}{x\ln(1+x) - x^2}$ lorsque x tend vers 0.

III.2 Étude de position relative entre une courbe et sa tangente

Petite remarque

On n'oublie pas que l'on peut également étudier le signe de la différence par des méthodes plus "habituelles"...

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour étudier la position relative d'une courbe avec sa tangente en a au voisinage de a**, on peut :

- déterminer le $DL_2(a)$ de f,
- puis, si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^2\big)$, alors :
  - ◇ l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est : $y = a_0 + a_1(x-a)$,
  - ◇ si $a_2 \neq 0$, alors : $f(x) - \big(a_0 + a_1(x-a)\big) \underset{x\to a}{\sim} a_2(x-a)^2$
  - ◇ et le signe de $f(x) - \big(a_0 + a_1(x-a)\big)$ au voisinage de a est alors le signe de a_2.

☞ Rappel...

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g ont même signe au voisinage de a.

✘ Attention !

Cette méthode ne fournit la position relative que **localement** !

Exemple 5

On considère la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}\sqrt{1+x}$, définie sur $[-1;+\infty[$, et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
Calculer le $DL_2(0)$ de f puis donner l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au points d'abscisse 0 et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.