6

Probabilités

Variables aléatoires à densité

Introduction...

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des variables aléatoires à valeurs discrètes (essentiellement à valeurs dans $\mathbb{N}$ même). Or, de façon générale (au programme d'ECG du moins), les variables aléatoires sont à valeurs réelles.
Dans ce chapitre, nous étudierons un certain type de variables aléatoires qui ne sont pas discrètes : les variables aléatoires à densité.
Attention, comme nous le verrons, il existe des variables aléatoires réelles qui ne sont ni discrètes ni à densité. Leur étude n'est pas au programme, même si quelques connaissances sont à avoir...

Sans doute que la plus célèbre des lois à densité est la *loi normale*. Nous l'étudierons dans le chapitre 9 et elle sera également à l'honneur dans le chapitre 11.

Les premières variables aléatoires non discrètes ont été étudiées au XVIIIème siècle, même si le formalisme n'est absolument pas celui étudié depuis. Sans rentrer dans la théorie de la mesure, nous étudierons les premiers aspects des variables aléatoires à densité qui ont ancré davantage encore le lien entre l'analyse et les probabilités, offrant peut-être à ces dernières une place à part entière dans le paysage mathématique actuel.

Pour bien démarrer...

1 # Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω. Définition et propriétés de la fonction de répartition de X.

2 # Une variable aléatoire est discrète si, et seulement si, sa fonction de répartition est :

3 # Intégrales impropres usuelles :

4 # Critères sur les intégrales impropres :

5 # Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Loi de $Z = X + Y$?

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.
On notera F_X la fonction de répartition de X.

I Définitions et premiers exemples

I.1 Variable aléatoire à densité

Définition 1 – Variable aléatoire à densité

La variable aléatoire X **est à densité** lorsque sa fonction de répartition est :

- continue sur $\mathbb{R}$,
- de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ saut éventuellement en un nombre fini de points.

On sait déjà que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$... Et réciproquement :

Théorème 1

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Si F est :

- croissante sur $\mathbb{R}$,
- telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$,
- continue sur $\mathbb{R}$,
- de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points,

alors il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire à densité dont F est la fonction de répartition.

⋆ Démonstration : Théorème admis. ⋆

Exemples 1

E1 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
Représentons F_X et montrons que la variable aléatoire X est à densité.

E2 Si X est une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$; elle n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : les variables aléatoires discrètes ne sont pas à densité.

☞ **Rappel...**
La réciproque est vraie : si F_X est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors X est discrète.

E3 Considérons la fonction $F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
Démontrons que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

$\boxed{\text{E4}}$ On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \max(1, X)$. Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \ Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leq 1 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 1 \end{cases}$$

Montrons que Y n'est ni discrète ni à densité.

I.2 Densité de probabilité

Définition 2 - Densité de probabilité

Soient X une variable aléatoire à densité et F_X sa fonction de répartition.
Une **densité de probabilité de X** est une fonction f_X, définie sur $\mathbb{R}$, telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ f_X(x) \geq 0$,
- en tout réel x en lequel F_X est $\mathscr{C}^1$, $f_X(x) = F_X'(x)$.

✘ Attention !

- Puisque F_X n'est pas nécessairement $\mathscr{C}^1$ partout, ces deux items ne définissent pas toujours une unique fonction.
Par conséquent, on parlera d'**une** densité.
- f_X ne sera pas continue là où F_X n'est pas $\mathscr{C}^1$.
- Si F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors il n'y a qu'une seule densité : F_X', qui est alors continue sur $\mathbb{R}$.

♣ Méthode 1 ♣ Pour montrer que X est à densité et en donner une densité :

- on montre que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- on obtient une densité de X en :
  - dérivant F_X en tout point en lequel elle est $\mathscr{C}^1$,
  - donnant une valeur arbitraire positive éventuellement ailleurs.

☞ Pour info...

Donner la loi d'une variable aléatoire à densité c'est en donner une densité.

Exemple 2

Reprenons la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

On sait déjà (Exemples 1 - E1) que X est à densité. Donnons-en une densité.

> **Petite remarque**
> En pratique, on ne prend par des valeurs complètement arbitraires... On pourrait faire preuve d'originalité, mais on ne le fait pas !
> On a pour habitude de prolonger par continuité (quand c'est possible) sur un des intervalles.

On sait déjà comment, à partir de la fonction de répartition, obtenir une densité. Réciproquement :

Théorème 2 - Lien densité / fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

> **★Subtile...★**
> Puisque f_X n'est pas nécessairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (même si ce sera généralement le cas), cette intégrale peut en fait être impropre en des points intermédiaires entre $-\infty$ et x...

⋆ Démonstration : Théorème admis. ⋆

> **Petite remarque**
> Si f_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors F_X sera $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On peut trouver une densité à partir de la fonction de répartition ; et réciproquement...
Or, donner une densité de X, c'est en donner la loi...
Par conséquent, on retrouve le résultat suivant, très utile sur les variables aléatoires à densité : **la fonction de répartition caractérise la loi**.

Finalement, si f_X est une densité de X, on a :

- f_X est positive sur $\mathbb{R}$,
- f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, on obtient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$.

Réciproquement :

> **Petite remarque**
> On a vu un résultat analogue dans le cas des VA discrètes...

Théorème 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Si :

- f est positive sur $\mathbb{R}$,
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut 1,

alors il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire dont f est une densité.

⋆ Démonstration : Théorème admis. ⋆

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> Quand l'énoncé donnera une densité f_X de X, on prendra souvent comme $X(\Omega)$ l'ensemble sur lequel f n'est pas nulle ou bien "le plus petit" ensemble E tel que $\displaystyle\int_E f_X(t)dt = 1$...

Exemples 3

E1 Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ est une densité de probabilité.

$\boxed{\text{E2}}$ Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité et déterminons la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f.

Propriétés 1

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X.

P1#

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

P2# Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X < x]) &= \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= F_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X > x]) &= \mathbb{P}([X \geq x]) \\ &= 1 - F_X(x) \\ &= \int_{x}^{+\infty} f_X(t)dt\end{aligned}$$

P3# Pour tous réels a, b tels que $a \leq b$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) &= \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b]) \\ &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{a}^{b} f_X(t)dt\end{aligned}$$

☞ Pour info...

On voit bien que la loi d'une VA à densité ne peut donc pas être la donnée de $\mathbb{P}([X = x])$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme pour les Va discrètes...

Petite remarque

Puisque f_X est positive, $\int_a^b f_X(t)dt$ est l'aire sous la courbe de f_X.

★ Démonstration :

P1# Soit $x \in \mathbb{R}$. De façon générale, on sait que $\mathbb{P}([X = x])$ est égale à la hauteur du saut de continuité de F_X en x. Or, X est à densité, donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en x.
Par conséquent : $\mathbb{P}([X = x]) = 0$.

P2# Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leq x]) &= \mathbb{P}\big([X = x] \cup [X < x]\big) \\ &= \mathbb{P}([X = x]) + \mathbb{P}([X < x]) && [X = x] \text{ et } [X < x] \text{ sont incompatibles} \\ &= \mathbb{P}([X < x]) && \text{P1}\end{aligned}$$

  Et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leq x]) &= F_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt && \text{théorème 2}\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \geq x]) &= \mathbb{P}\big([X = x] \cup [X > x]\big) \\ &= \mathbb{P}([X = x]) + \mathbb{P}([X > x]) && [X = x] \text{ et } [X > x] \text{ sont incompatibles} \\ &= \mathbb{P}([X > x]) && \text{P1} \\ &= \mathbb{P}(\overline{[X \leq x]}) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= 1 - F_X(x) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt && \text{théorème 2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt && f_X \text{ est une densité de probabilité} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt + \int_{x}^{-\infty} f_X(t)dt \\ &= \int_{x}^{+\infty} f_X(t)dt && \text{relation de Chasles}\end{aligned}$$

P3# Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. De la même façon que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) &= \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b])\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leq b]) &= \mathbb{P}\big([X < a] \cup [a \leq X \leq]\big) \\ &= \mathbb{P}([X < a]) + \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) && [X < a] \text{ et } [a \leq X \leq b] \text{ sont incompatibles}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) &= \mathbb{P}([X \leq b]) - \mathbb{P}([X < a]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq b]) - \mathbb{P}([X \leq a]) && \text{P2} \\ &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt \\ &= \int_{a}^{b} f_X(t)dt && \text{relation de Chasles}\end{aligned}$$

★

☞ Pour info...

En fait : $\mathbb{P}([X = x]) = F_X(x) - \lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} F_X(t)$ (et $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} F_X(t) = \mathbb{P}([X < x])$).
Ce résultat pourrait être démontré avec le théorème de limite monotone sur les probabilités, qui n'est plus au programme...

Exemple 4

Reprenons la variable aléatoire introduite dans Exemples 3 - E2.
Déterminons :

$$\mathbb{P}([X \geq 2]) \;\; ; \;\; \mathbb{P}([X \leq 3]) \;\; ; \;\; \mathbb{P}_{[X\geq 2]}([X \leq 3])$$

II Transformation d'une variable aléatoire

Considérons une variable aléatoire X à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Pour toute fonction g définie et **continue** sur $X(\Omega)$, on peut définir la variable aléatoire $Y = g(X)$.
Traitons quelques cas classiques...

✘ Attention !
$g(X)$ n'est pas forcément à densité ! Voir Exemple 6 ci-dessous. En revanche, la continuité de g assure que c'est bien une VA (dans le cas discret, la continuité n'était pas nécessaire pour que $g(X)$ soit une VA).

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour déterminer si la variable aléatoire $Y = g(X)$ est à densité et, le cas échéant, en donner une densité :**

- on commence par réfléchir à $Y(\Omega)$ (en principe, une inclusion suffit...),
- on détermine la fonction de répartition de Y (on veille à bien justifier les égalités d'évènements en jeu...),
- on regarde si F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- si c'est le cas, alors on donne une densité en dérivant F_Y là où elle est $\mathscr{C}^1$ et en donnant des valeurs "arbitraires positives" ailleurs (attention à la dérivée d'une composée...).

☞ Rappel...
Quand cela a du sens :

$$(f \circ g)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemples 5

Dans tous ces exemples, on considère une variable aléatoire X de densité f_X, continue sur $\mathbb{R}$ et de fonction de répartition F_X.
On considère également que $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

E1 Montrons que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et donnons-en un densité.

E2 Montrons que la variable aléatoire $Y = \exp(X)$ est à densité et donnons-en un densité.

E3 Montrons que la variable aléatoire $Y = |X|$ est à densité et donnons-en un densité.

E4 Montrons que la variable aléatoire $Y = X^2$ est à densité et donnons-en un densité.

Et un cas où $g(X)$ n'est pas nécessairement à densité...

Exemple 6

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X. On considère la variable aléatoire $Y = X + |X|$. Déterminons, pour tout $x < 0$, $F_Y(x)$, puis $F_Y(0)$. Donnons ensuite une condition suffisante portant sur F_X pour que Y ne soit pas à densité.

☞ **Rappel...**

$\forall a \in \mathbb{R},\ |a| =$ ....

III Moments d'une variable aléatoire à densité

III.1 Espérance

Définition 3 – Espérance d'une variable aléatoire à densité

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X.
On dit que la variable aléatoire X admet **une espérance**, notée $\mathbb{E}(X)$, lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$ est absolument convergente et, le cas échéant :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$$

Petite remarque
On ne peut que voir l'analogie avec les variables aléatoires discrètes... N'est-ce pas ?!

Exemples 7

E1 Considérons une variable aléatoire X de densité la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ (Exemples 3 - E1). Justifions que X possède une espérance et calculons-la.

- On sait que :

$$\begin{array}{lll}
X \text{ admet une espérance} & \text{si, et seulement si,} & \text{l'intégrale } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \text{ est absolument convergente}\\
& \text{si, et seulement si,} & \text{l'intégrale } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)dt \text{ est convergente}\\
& \text{si, et seulement si,} & \text{les intégrales } \displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t|f(t)dt \text{ et } \int_{0}^{+\infty} |t|f(t)dt \text{ sont convergentes}\\
& \text{si, et seulement si,} & \text{les intégrales } \displaystyle\int_{-\infty}^{0} -tf(t)dt \text{ et } \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt \text{ sont convergentes}\\
& \text{si, et seulement si,} & \text{les intégrales } \displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt \text{ et } \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt \text{ sont convergentes}
\end{array}$$

- ◇ **Pour $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$.**

  ⇝ La fonction $t \longmapsto f(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.

  ⇝ Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $tf(t) = \frac{1}{2}te^{-t}$. Et :

  ➟ par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}t^3\mathrm{e}^{-t} = 0$. Par conséquent :

  $$tf(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

  ➟ l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$).

  ➟ $\forall t \in [0;+\infty[$, $tf(t) \geq 0$; $\frac{1}{t^2} \geq 0$

  Ainsi, par critère de négligeabilité sur les intégrales à intégrande positive, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

  Petite remarque
  On pourrait calculer la valeur de cette intégrale (comment ?), mais ce n'est pas nécessaire ici.

  Par conséquent : l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

  ◇ **Pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt$.**
  On sait que :

  ⇝ la fonction f est paire, donc la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est impaire,

  ⇝ l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

  Par conséquent : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt = -\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt\\
&= \int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt\\
&= -\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt\\
&= 0
\end{aligned}$$

relation de Chasles, licite car les deux intégrales en jeu sont convergentes

E2 Considérons une variable aléatoire X de densité la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (Exemples 3 - E2). Justifions que X ne possède pas d'espérance.

On retrouve les propriétés habituelles sur l'espérance (linéarité, croissance) qui sont rappelées en fin de chapitre.

Et, comme pour les variables aléatoires discrètes, on peut déterminer l'espérance de $g(X)$ en connaissant seulement une densité de X, sans connaître une densité de $g(X)$...

Théorème 4 - de transfert

Soient X une variable aléatoire à densité, de densité f_X nulle en dehors de $X(\Omega)$ ainsi que g une fonction continue sur $X(\Omega)$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$ est absolument convergente et, le cas échéant :

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$$

En gros...
Si f est nulle en dehors d'un intervalle $]a;b[$ (avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), alors $g(X)$ admet une espérance ssi $\displaystyle\int_a^b g(t)f_X(t)dt$ est absolument convergente et, le cas échéant : $\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \displaystyle\int_a^b g(t)f_X(t)dt$.

Important !
Cas particulier important.
Sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt$$

⋆ Démonstration : Théorème admis. ⋆

III.2 Variance et écart-type

Définition 4 - Moments d'une variable aléatoire

Soit $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un **moment d'ordre r** lorsque X^r admet une espérance.
Dans ce cas, le moment d'ordre r est $\mathbb{E}(X^r)$.

Petite remarque
Le moment d'ordre 1 est l'espérance...
Le moment d'ordre 2 nous intéressera particulièrement... et on le calculera à l'aide du théorème de transfert !

On retrouve l'analogie avec le cas discret :

Propriété 2

Si $X(\Omega)$ est borné, alors X admet un moment à tout ordre.

⋆ Démonstration :

Important !
On peut toujours considérer une densité de X qui soit nulle en dehors de $X(\Omega)$...

$\star$

Théorème 5

Soient X une variable aléatoire à densité, de densité f_X ainsi que $r \in \mathbb{N}^*$.
Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment de tout ordre inférieur ou égal à r.

$\star$

Démonstration : Supposons que X admette un moment d'ordre r. Ainsi, par théorème de transfert, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r| f_X(t)dt$ est convergente.
Soit $q \in [\![1; r]\!]$.
Puisque la fonction $t \longmapsto t^q$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale, puisque $q \in \mathbb{N}^*$), d'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned} X \text{ admet un moment d'ordre } q \quad & \text{si, et seulement si,} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^q f_X(t)dt \text{ est absolument convergente} \\ & \text{si, et seulement si,} \quad \int_{-\infty}^{0} |t|^q f_X(t)dt \text{ et } \int_{0}^{+\infty} |t|^q f_X(t)dt \text{ sont convergentes} \end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Si $|t| \leq 1$:
  Alors, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^q$ sur $\mathbb{R}^+$, on a :
  $$|t|^q \leq 1$$
- Si $|t| > 1$:
  On a :
  $$q \leq r$$
  D'où, en multipliant par $\ln(|t|) > 0$ (car $|t| > 1$) :
  $$q \ln(|t|) \leq r \ln(|t|)$$
  Et, par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
  $$\exp\left(q \ln(|t|)\right) \leq \exp\left(r \ln(|t|)\right)$$
  Autrement dit :
  $$|t|^q \leq |t|^r$$

Dans les deux cas, on obtient :
$$|t|^q \leq 1 + |t|^r$$
Or, $f_X(t) \geq 0$, d'où :
$$|t|^q f_X(t) \leq f_X(t) + |t|^r f_X(t)$$
On a ainsi :

- $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leq |t|^q f_X(t) \leq f_X(t) + |t|^r f_X(t)$.
- Mais :
  - ◇ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ est une intégrale convergente (égale à 1, car f_X est une densité de probabilité), donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_X(t)dt$ sont convergentes ;
  - ◇ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r f_X(t)dt$ est une intégrale convergente (car X admet un moment d'ordre r, et par théorème de transfert, la fonction $t \longmapsto t^r$ étant continue sur $\mathbb{R}$), donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t|^r f_X(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |t|^r f_X(t)dt$ sont convergentes.

Idée de la démonstration

On suppose la CV de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r| f_X(t)dt$ pour établir la CV de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^q| f_X(t)dt$... en utilisant le critère de comparaison sur les intégrales impropres à intégrande positive.

Par conséquent : les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\left(f_X(t)+|t|^r f_X(t)dt\right)$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left(f_X(t)+|t|^r f_X(t)dt\right)$ sont convergentes.

Ainsi, en appliquant deux fois le critère de comparaison sur les intégrales impropres à intégrande positive, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}|t^q|f_X(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}|t^q|f_X(t)dt$ sont convergentes. D'où l'existence du moment d'ordre q de X.

⋆

Définitions 5 - Variance & écart-type

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.

D1# On dit que la variable aléatoire X admet une **variance** lorsque $\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2$ admet une espérance.
Dans ce cas, on note $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)$ (*qui est donc un nombre positif*).

D2# Si X admet une variance, alors on note $\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$: c'est l'**écart-type** de X.

☞ Pour info...
Puisque $\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\geq 0$, les cas où X n'admet pas de variance sont les cas où cette variance est *infinie* : les valeurs de X qui ont un poids important sont trop étalées...

A nouveau, la petite formule qui fait plaisir pour le calcul de la variance :

Théorème 6 - Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.
X admet une variance si, et seulement si, elle admet un moment d'ordre 2 ; et dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Petite remarque
D'après les théorèmes 2 et 3 : si X admet une variance, alors elle admet une espérance (heureusement, vue la formule de KH).
La réciproque est utile : si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.

⋆ Démonstration : Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. Raisonnons par double implication pour démontrer l'équivalence, mais commençons déjà par développer $\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2$:

$$\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2=X^2-2\mathbb{E}(X)X+\mathbb{E}(X)^2$$

Ensuite...

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que X admette une variance. D'après l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$X^2=\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2+2\mathbb{E}(X)X+\mathbb{E}(X)^2$$

Mais X admet une variance, donc $\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2$ admet une espérance ; tout comme X et $\mathbb{E}(X)^2$ (qui est une variable aléatoire constante).
Donc X^2 est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance : par conséquent, elle admet également une espérance.
Autrement dit, X admet un moment d'ordre 2.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que X admette un moment d'ordre 2.
On avait :

$$\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2=X^2-2\mathbb{E}(X)X+\mathbb{E}(X)^2$$

Mais comme X admet un moment d'ordre 2, X^2 admet une espérance ; ce qui est également le cas de X et $\mathbb{E}(X)$.
Donc $\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance : par conséquent, elle admet également une espérance. Autrement dit, X admet une variance.

Et, si X admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left(X^2-2\mathbb{E}(X)X+\mathbb{E}(X)^2\right)\\ &= \mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)+\left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \quad \text{linéarité de l'espérance}\\ &= \mathbb{E}(X^2)-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2\end{aligned}$$

⋆

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour étudier l'existence et, le cas échéant, calculer une variance :**
on regarde si X admet un moment d'ordre 2 (avec le théorème de transfert), puis deux cas :

- si non, alors X n'a pas de variance ;
- si oui, alors on calcule $\mathbb{E}(X^2)$, puis on calcule $\mathbb{V}(X)$ avec la formule de Koenig-Huygens.

Important !
Parfois, l'énoncé fait calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$ puis demander d'en déduire $\mathbb{V}(X)$... Il suffit de remarquer que : $\mathbb{E}(X(X-1))=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)$, pour ensuite avoir $\mathbb{E}(X^2)$ et enfin $\mathbb{V}(X)$.

Exemple 8

La variable aléatoire X (Exemples 7 - E2) n'admet pas d'espérance ; elle n'admet donc pas de moment d'ordre 2 et pas non-plus de variance.

Là encore, les propriétés habituelles sur la variance sont encore valables et sont rappelées en fin de chapitre.

III.3 Variable aléatoire centrée, réduite, centrée & réduite.

Définitions 6 – VA centrée / réduite

D1# Si X admet une espérance, on dit que X est **centrée** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

D2# Si X admet une variance, on dit que X est **réduite** lorsque $\sigma(X) = 1$.

Propriété 3

Si X admet une espérance et une variance et si $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors :

- la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée ;
- la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Notation

Si $\sigma(X) \neq 0$, on note parfois $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

Démonstration : Les propriétés sur l'espérance et la variance permettent de démontrer sans effort ces deux résultats...

IV Indépendance de variables aléatoires à densité

Définitions 7 – Indépendance de VA

D1# Soient X et Y deux variables aléatoires à densité.
On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall I, J \subset \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([X \in I] \cap [Y \in J]\big) = \mathbb{P}([X \in I]) \times \mathbb{P}([Y \in J])$$

D2# Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires à densité.
On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque :

$$\forall I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \in I_k])$$

D3# Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité.
On dit que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Et le fameux :

Propriété 4 – Lemme des coalitions

Soient $n \in [\![3; +\infty[\![$ et $(X_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ une suite de n variables aléatoires discrètes.
Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in [\![2; n-1]\!]$, toute variable aléatoire fonction des $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $X_{p+1}, \dots, X_n$.

Démonstration : Théorème admis.

♣ **Méthode 4** ♣ **Deux méthodes classiques...**

1. Pour la loi de $Z=\min(X,Y)$ **si X et Y sont indépendantes** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z>z]) &= \mathbb{P}\big([\min(X,Y)>z]\big)\\
&= \mathbb{P}\big([X>z]\cap[Y>z]\big)\\
&= \mathbb{P}([X>z])\times\mathbb{P}([Y>z]) \quad \text{indépendance de } X \text{ et } Y\\
&= \big(1-\mathbb{P}([X\le z])\big)\big(1-\mathbb{P}([Y\le z])\big)\\
&= \big(1-F_X(z)\big)\big(1-F_Y(z)\big)
\end{aligned}$$

Puis on donne $\mathbb{P}\big([Z\le z]\big)$...

2. Pour la loi de $Z=\max(X,Y)$ **si X et Y sont indépendantes** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z\le z]) &= \mathbb{P}\big([\max(X,Y)\le z]\big)\\
&= \mathbb{P}\big([X\le z]\cap[Y\le z]\big)\\
&= \mathbb{P}([X\le z])\times\mathbb{P}([Y\le z]) \quad \text{indépendance de } X \text{ et } Y\\
&= F_X(z)F_Y(z)
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on regarde ensuite si Z est à densité et, le cas échéant, on en donne une densité.

Réflexe !

Pour tous réels x,y,z :

$\min(x,y)>z \iff \left\{\begin{array}{l} x>z\\ y>z\end{array}\right.$

$\max(x,y)\le z \iff \left\{\begin{array}{l} x\le z\\ y\le z\end{array}\right.$

Petite remarque

Méthode identique pour $\min(X_1,X_2,\dots,X_n)$ et $\max(X_1,X_2,\dots,X_n)$ si $X_1,X_2,..,X_n$ sont indépendantes.

Le travail sur la somme de variables aléatoires à densité indépendantes n'est pas au programme en mathématiques appliquées, mais il arrive régulièrement que l'énoncé fournisse les résultats nécessaires à une telle étude.

Petite remarque

Nous verrons un exemple dans le chapitre 9.

Exemple 9

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de X_k est $F : x\longmapsto \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\in[0;1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{array}\right.$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $M_n=\max(X_1,X_2,\dots,X_n)$. Démontrons que M_n est une variable aléatoire à densité et donnons-en une densité.

V Comparatif VA discrètes / VA à densité

	Variables aléatoires discrètes	Variables aléatoires à densité
Donnée de la loi de probabilité	$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et on donne la *fonction de masse* : • $\mathbb{P}([X=n])$ pour tout $n \in X(\Omega)$ • $\mathbb{P}([X=n])=0$ pour tout n en dehors de $X(\Omega)$ • On a : $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=n])=1$	$X(\Omega)$ est un intervalle (ou union d'intervalles) de $\mathbb{R}$ et on donne une *fonction de densité* : • f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points • f_X est positive sur $\mathbb{R}$ • $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ est convergente et vaut 1
Calculs de probabilités	• $\displaystyle \mathbb{P}([a\leq X\leq b]) = \sum_{\substack{n\in X(\Omega)\\ a\leq n\leq b}} \mathbb{P}([X=n]) = F_X(b)-F_X(a)+\mathbb{P}([X=a])$ • $\displaystyle \mathbb{P}([X\leq b]) = \sum_{\substack{n\in X(\Omega)\\ n\leq b}} \mathbb{P}([X=n])$ • $\displaystyle \mathbb{P}([X\geq a]) = \sum_{\substack{n\in X(\Omega)\\ n\geq a}} \mathbb{P}([X=n])$	• $\displaystyle \mathbb{P}([a\leq X\leq b]) = \int_a^b f_X(t)dt = F_X(b)-F_X(a)$ • $\displaystyle \mathbb{P}([X\leq b]) = \int_{-\infty}^b f_X(t)dt$ • $\displaystyle \mathbb{P}([X\geq a]) = \int_a^{+\infty} f_X(t)dt$ • $\mathbb{P}([X=a])=0$; $\mathbb{P}([X<b])=\mathbb{P}([X\leq b])$; $\mathbb{P}([X>a])=\mathbb{P}([X\geq a])$
Propriétés de la fonction de répartition F_X	• F_X est constante par morceaux • F_X est discontinue en chaque $n\in X(\Omega)$ • le saut de continuité en n est égal à $\mathbb{P}(X=n)$ • $\forall n\in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X\leq n])-\mathbb{P}([X\leq n-1])=\mathbb{P}(X=n)$	• F_X continue sur $\mathbb{R}$ • F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points • pour tout x où F_X est $\mathscr{C}^1$: $F_X'(x)=f_X(x)$
Indépendance	Pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$: $\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)=\mathbb{P}([X=x])\times\mathbb{P}([Y=y])$	Pour tous intervalles I, J de $\mathbb{R}$: $\mathbb{P}\big([X\in I]\cap[Y\in J]\big)=\mathbb{P}([X\in I])\times\mathbb{P}([Y\in J])$
Espérance (si existence)	• X a une espérance ssi $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} \lvert n\mathbb{P}([X=n])\rvert$ est convergente • $\displaystyle\mathbb{E}(X)=\sum_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n])$	• X a une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert tf_X(t)\rvert dt$ est convergente • $\displaystyle\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$
Théorème de transfert	• $g(X)$ a une espérance ssi $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} \lvert g(n)\mathbb{P}(X=n)\rvert$ est convergente • $\displaystyle\mathbb{E}\big(g(X)\big)=\sum_{n\in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}([X=n])$ et en particulier : $\displaystyle\mathbb{E}(X^2)=\sum_{n\in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}([X=n])$	Si g est continue sur $X(\Omega)$: • $g(X)$ a une espérance ssi $\displaystyle\int_{X(\Omega)} \lvert g(t)f_X(t)\rvert dt$ est convergente • $\displaystyle\mathbb{E}\big(g(X)\big)=\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$ et en particulier : $\displaystyle\mathbb{E}(X^2)=\int_{X(\Omega)} t^2 f_X(t)dt$
Variance (si existence)	$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$	
Formule de Keonig-Huygens	$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$	
Propriétés de l'espérance et de la variance	Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. • **Linéarité de l'espérance.** Si X et Y ont une espérance, alors, $aX+bY$ aussi et : $\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$. • **Croissance de l'espérance.** Si X et Y ont une espérance et $\mathbb{P}([X\leq Y])=1$, alors $\mathbb{E}(X)\leq\mathbb{E}(Y)$. • Si X a une variance, alors $aX+b$ aussi et : $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$. • Si X et Y ont une espérance et sont indépendantes, alors XY a une espérance et $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Si $X_1,\dots,X_n$ ont une espérance et sont indépendantes, alors $\displaystyle\prod_{k=1}^n X_k$ a une espérance et $\displaystyle\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbb{E}(X_k)$. • Si X et Y ont une variance et sont indépendantes, alors $X+Y$ a une variance et $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$. Si $X_1,\dots,X_n$ ont une variance et sont indépendantes, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k$ a une variance et $\displaystyle\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\sum_{k=1}^n\mathbb{V}(X_k)$.	

On admet que l'on peut étendre les propriétés sur l'espérance et la variance, vues dans le cas discret (et démontrées dans le chapitre 2) au cas des variables aléatoires à densité. Il nous manque des outils pour les démontrer dans ce cas-ci.
On admet également que l'on peut définir l'indépendance (celle dans le cas à densité), l'espérance et la variance pour des variables aléatoires ni discrètes, ni à densité. Puis on admet ensuite que les propriétés énoncées en fin de tableau sont valables dans ce cas de figure.