Exercices du chapitre 9

Tout sur les variables aléatoires à densité

●●○○ Exercice 1 - Démonstrations de cours

1. Proposer deux méthodes pour établir la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
2. Démontrer les résultats obtenus sur les fonctions de répartition, les espérances et variances des lois à densité usuelles.

●○○○ Exercice 2 - Amusement sur la loi normale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 1. On note $\alpha = \mathbb{P}([X \leq -2])$. Exprimer en fonction de α les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}([X \geq -2])$
2. $\mathbb{P}([-2 \leq X \leq 1])$
3. $\mathbb{P}([X \geq 4])$
4. $\mathbb{P}([-2 \leq X \leq 4])$

●○○○ Exercice 3 - Du minimum...

Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ ainsi que $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. On suppose que $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la loi uniforme sur $[0; 1]$. Démontrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. On suppose que $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > x0$. Démontrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

●●○○ Exercice 4

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite, on notera X une variable aléatoire de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Démontrer que la variable aléatoire $|X|$ est à densité et reconnaître sa loi.
4. En déduire un programme **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.

●●○○ Exercice 5 - Loi logistique

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Démontrer que X est une variable aléatoire à densité puis en déterminer une densité, notée f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. En déduire que X admet une espérance et la déterminer.
4. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0; 1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.
5. En déduire un programme **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.

●●○○ Exercice 6 - EDHEC 2005 E

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. 1.a. Pour tout $x \in [0; 1[$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   1.b. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.

   1.c. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, de densité f et de fonction de répartition F.
2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.
3. La suite de l'exercice a pour but de déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
   Pour cela, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable à densité. On note G sa fonction de répartition.

   3.a. Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ en fonction de x.

   3.b. En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.

   3.c. Démontrer que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.

   3.d. Exprimer X en fonction de Y puis en déduire que X possède une espérance que l'on exprimera en fonction de a.

3.e. Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$.
En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

●●○○ Exercice 7 - EDHEC 2001 E (Loi de Rayleigh de paramètre 1)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. *Soit donc X une variable aléatoire de densité f.*
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. En déduire la médiane de X, notée $med(X)$, c'est à dire le réel a pour lequel $\mathbb{P}([X \leq a]) = \dfrac{1}{2}$.
4. On appelle **mode de la variable aléatoire X** tout réel x en lequel f atteint son maximum.
Montrer que X n'admet qu'un seul mode, notée M_0, et le déterminer.
5. En utilisant un résultat connu concernant la loi normale, établir que X possède une espérance et la calculer.
6. Justifier que X admet une variance et la calculer.
7. On désigne par G la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = X^2$.
   - **7.a.** Exprimer G en fonction de F_X.
   - **7.b.** En déduire que Y est une variable aléatoire à densité. Reconnaître la loi de Y.
   - **7.c.** Écrire un script **`Python`** qui permet de simuler la variable aléatoire X.

●●○○ Exercice 8 - EDHEC 2002 E

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$.

1. **1.a.** Justifier que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   - **1.b.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([Y = k-1])$.
   - **1.c.** En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   - **1.d.** Justifier alors que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.
2. On pose $Z = X - Y$.
   - **2.a.** Déterminer $Z(\Omega)$.
   - **2.b.** Établir :
   $$\forall x \in [0;1[,\ \mathbb{P}([Z \leq x]) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$$
   - **2.c.** En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
   - **2.d.** Démontrer que Z admet une espérance et la déterminer.
   Ce résultat était-il prévisible ?

●●○○ Exercice 9 - Ecricome 2003 E

Sous diverses hypothèses, l'exercice différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

Partie 1

On suppose que A produit 60% des objets et B en produit 40%. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$ alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A.
2. On suppose que le nombre d'objets produits par A en une heure est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'objets défectueux produits par A en une heure.
   - **2.a.** Rappeler la loi de Y, son espérance et sa variance.
   - **2.b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in X(\Omega)$, donner $\mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k])$. *On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.*
   - **2.c.** En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Partie 2.

On considère la fonction $f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera Z.
2. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
3. Démontrer que Z admet une espérance et la déterminer.
4. La variable aléatoire Z admet-elle une variance ?
5. Dans cette question, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes, d'une pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z.
   - **5.a.** Déterminer les probabilités :
   $$\mathbb{P}([Z_1 \geq 2]) \ ;\ \mathbb{P}([Z_1 \leq 3]) \ ;\ \mathbb{P}_{[Z_1 \geq 2]}([Z_1 \leq 3])$$
   - **5.b.** On note $T = \max(Z_1; Z_2)$. Exprimer la fonction de répartition de T en fonction de F_Z. En déduire que T est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

Partie 3.

On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B. Le temps de passage, exprimé en minutes, pour un objet sur la chaîne A est est une variable aléatoire M suivant la loi exponentielle de paramètre 2. Le temps de passage, exprimé en minutes, pour un objet sur la chaîne B est est une variable aléatoire N suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Rappeler l'expression d'une densité de probabilités v de M et w de N.
2. On note S la variable aléatoire égale au temps total de fabrication d'une pièce. Déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.

●●○○ Exercice 10 - Ecricome 2001 E

Un système est constitué de n composants (avec $n \in [\![2;+\infty[\![$). On suppose que les variables aléatoires $T_1, T_2, \dots, T_n$ mesurant le temps de fonctionnement de chacun des n composants sont indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Partie 1. Nombre moyen de composants défaillants entre les instants 0 et t

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de composants défaillants entre les instants 0 et t.

1. Pour tout $\in [\![1;n]\!]$, calculer $\mathbb{P}([T_i < t])$.
2. Montrer que N_t suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres et l'espérance.
3. A partir de quel instant t_0 le nombre moyen de composants défaillants dépasse-t-il la moitié du nombre de composants ?

Partie 2. Montage en série

On suppose que le système fonctionne si tous les composants eux-mêmes fonctionnent et on note S_n la variable aléatoire égale à la durée de fonctionnement du système.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $[S_n > t]$ en fonction des évènements $[T_i > t]$ pour $i \in [\![1;n]\!]$.
2. Déterminer alors la fonction de répartition de S_n puis reconnaître sa loi. Donner alors l'espérance et la variance de S_n.

Partie 3. Montage en parallèle

On suppose maintenant que le système fonctionne tant qu'au moins un des composants fonctionne et on note U_n la variable aléatoire égale à la durée de fonctionnement du système.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $[U_n < t]$ en fonction des évènements $[T_i < t]$ pour $i \in [\![1;n]\!]$.
2. Déterminer alors la fonction de répartition de U_n puis montrer qu'elle admet pour densité la fonction $g_n : t \longmapsto \begin{cases} n\lambda(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. Montrer l'existence de $\mathbb{E}(U_n)$ et prouver :
$$\mathbb{E}(U_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}$$
puis :
$$\mathbb{E}(U_{n+1}) - \mathbb{E}(U_n) = \frac{1}{\lambda(n+1)}$$
4. **4.a.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}$.

   4.b. Démontrer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}$.

   4.c. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
5. Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

●●○○ Exercice 11 - EML 2023 E

L'objet de l'exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Les parties II et III sont indépendantes mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I. Préliminaire

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   1.a. Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

   1.b. La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

   1.c. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h.
2. Pour tout $x \in [0;1]$, on pose $g(x) = -h(x) - h(1-x)$. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie II. Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **l'entropie de X** est, sous réserve d'existence :

$$H(X) = -\sum_{x\in X(\Omega)} h\Big(\mathbb{P}([X=x])\Big)$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i)$$

où, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$.

3. Dans cette question, U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1;n]\!]$. Déterminer $H(U)$.
4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Démontrer que $H(X) \leq \ln(2)$ avec égalité si, et seulement si, $p = \dfrac{1}{2}$. On pourra utiliser la question 2..
5. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2, définies sur le même espace probabilisé.
   Soit Z la variable aléatoire telle que :
   - $Z(\Omega) = \{0;1\}$;
   - l'évènement $[Z = 1]$ est réalisé si, et seulement si, l'évènement "$X_1 + X_2$ est impair" est réalisé.

   On définit le réel p par : $p = \mathbb{P}([Z = 1])$.
   - 5.a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?
   - 5.b. Démontrer que $p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$.
   - 5.c. Vérifier que $1 - 2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$.
6. Soient $p \in]0;1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que :
   - $Z_n(\Omega) = \{0;1\}$;
   - l'évènement $[Z_n = 1]$ est réalisé si, et seulement si, l'évènement "S_n est impair" est réalisé.

   - 6.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?
   - 6.b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - 2\mathbb{P}([Z_n = 1]) = (1-2p)^n$.
   - 6.c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(Z_n) \leq \ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Partie III. Des variables aléatoires à densité

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de densité f, on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\circ f(t)dt$ converge absolument ; **l'entropie** de X est alors :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h\circ f(t)dt$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$, où a et b sont des réels tels que $a < b$.
   - 7.a. Démontrer que U admet une entropie.
   - 7.b. Déterminer $H(U)$.
8. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f.
   - 8.a. Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ et déterminer sa valeur.
   - 8.b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln(\lambda)$.
9. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note Φ la densité usuelle de la variable aléatoire X.
   - 9.a. Donner l'espérance et la variance de X. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\Phi(t)dt$.
   - 9.b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \dfrac{1+\ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.

●●○○ Exercice 12 - EML 2019 E

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

PARTIE A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$.

1. 1.a. Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$.

   1.b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt$ converge.

   On admet le résultat suivant :
$$\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt = \mathbb{P}([U \leq V])$$

2. En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big) f_V(t) dt$.

3. **Exemple** : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

   3.a. Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

   3.b. En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. On considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par :$M_n = \min(T_1, ..., T_n)$.

   4.a. Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}([M_n > t])$.

   4.b. En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
   Reconnaître la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).

5. 5.a. Montrer : $\mathbb{P}([N = 1]) = \mathbb{P}([T_1 \leq T_0]) = \dfrac{1}{2}$.

   5.b. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[N > n] \cup [N = 0] = [M_n > T_0]$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}\big([N > n] \cup [N = 0]\big)$ en fonction de n.

   5.c. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}([N = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   5.d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N = 0])$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

●●○○ Exercice 13 - EDHEC 2016 E

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0, 1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3, 1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1, 3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}([Z = 1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z = -1]) = 1 - p$$
- Enfin,on note X la variable aléatoire, définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$
- On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

2. 2.a. Établir, grâce au système complet d'évènements $([Z = 1], [Z = -1])$, que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x)$$

   2.b. Vérifier que $X(\Omega) = [-3, 3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :
$$x < -3, \quad -3 \leq x \leq -1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

   2.c. On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

   2.d. Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

   3.a. Vérifier que l'on a :
$$X = U\frac{1 + Z}{2} + V\frac{1 - Z}{2}$$

   3.b. Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

3.c. En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

4. 4.a. Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Déterminer la loi de $2T-1$.

4.b. Écrire des commandes **Python** permettant de simuler U, V,Z, puis X.

●●○○ Exercice 14 - EDHEC 2012 E

Dans tout l'exercice, λ désigne un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$.

1. 1.a. Montrer que la fonction f est paire.

1.b. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et la calculer.

1.c. Montrer enfin que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2. 2.a. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx$ est convergente et qu'elle vaut $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$.

2.b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ est convergente et la calculer.

2.c. En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.

3. 3.a. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ est convergente et la calculer.

3.b. En déduire que la variable aléatoire X possède une variance et donner sa valeur.

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

4.a. Donner l'expression de la fonction de répartition de Y, notée F_Y, à l'aide de celle de la variable aléatoire de X, notée F_X.

4.b. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité, notée f_Y, puis vérifier que Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

4.c. Retrouver alors la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1[$.

5.a. On pose $W = \dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire.
Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire W.

6. 6.a. Déduire des questions précédentes une fonction **Python** d'en-tête qui simule une réalisation de $|X|$.

6.b. Justifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.

6.c. En déduire, en utilisant les résultats des questions 4. et 5. une fonction **Python** qui simule une réalisation de X.

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n variables aléatoires Y_1,...,Y_n, supposées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

7. On considère des réels x_1,...,x_n strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $L(\lambda) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$.

7.a. Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln\big(L(\lambda)\big)$ en fonction de λ, x_1,...,x_n.

7.b. On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0,+\infty[$ par : $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.
Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de x_1,...,x_n.
Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

8. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2, $Z_n = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k}$.
On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La suite $(Z_n)_{n\geq 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.

8.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
On admet le résultat suivant :
Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X et f_Y soient bornées.
Alors la variable aléatoire $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $X+Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$
En utilisant la propriété admise, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n est une variable aléatoire à densité et admet pour densité la fonction f_n définie par :
$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

8.b. Soit $n \geq 2$. En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t) dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n}{n-1}\lambda$.

8.c. Déterminer une variable aléatoire Z_n', ne dépendant pas de λ, mais exprimée en fonction de Z_n dont l'espérance est égale à λ.