Exercices du chapitre 8
Équations différentielles et systèmes différentiels

●○○○ Exercice 1 - Résolution d'EDL1

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y' - y = 2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
5. $y' + y = e^x + x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
6. $y' - y = -2e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
7. $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$
8. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
9. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
10. $y' - 4y = e^{2x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
11. $y' - 4y = e^{4x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
    Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{4x}$, avec $P \in \mathbb{R}_1[X]$.
12. $y' + y = 2xe^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
    Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{-x}$, avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

●○○○ Exercice 2 - Résolution d'EDL2

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y'' + y' - 2y = 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y'' - 2y' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 1.
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{-x}$, avec $P \in \mathbb{R}_1[X]$.
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{x}$, avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

●●○○ Exercice 3 - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et posons $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{-x}$. Établir :
$$\big(f \text{ est solution de } (E)\big) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}\right)$$
3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

●●○○ Exercice 4 - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = e^{e^{-x}}$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' - y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et posons $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{x}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ' pour que f soit solution de (E).
3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

●●○○ Exercice 5 - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 3y \\ y' & = & x & - & y \end{array} \right.$$

1. Trouver les équilibres du système (S).
2. Justifier que toutes les trajectoires de (S) ne sont pas convergentes.
3. Résoudre le système (S).
4. Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une.

●●○○ Exercice 6 - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & y \\ y' & = & -2x & - & 2y \end{array} \right.$$

1. Montrer que les trajectoires de (S) sont convergentes.
2. Trouver les équilibres de (S).
3. Résoudre le système (S).
4. Expliciter une trajectoire non constante qui vers vers $(-2; -2)$.

●●○○ Exercice 7 - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & 3x & - & y \\ y' & = & x & + & y \end{array} \right.$$

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A possède une unique valeur propre que l'on déterminera. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible puis calculer P^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T cette matrice.
4. Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$.
   - 4.a. Démontrer que $Y' = P^{-1}X'$.
   - 4.b. En déduire :
   $$X' = AX \iff Y' = TY$$
   - 4.c. Résoudre le système $Y' = TY$.
   - 4.d. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (S).

●●○○ Exercice 8 - De taille 3

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -2x & + & y & + & z \\ y' & = & x & - & 2y & + & z \\ z' & = & x & + & y & - & 2z \end{array} \right.$$

●●○○ Exercice 9 - Ecricome 2023 E (sujet zéro 1)

1. **Algèbre linéaire.** Considérons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
   - 1.a. Déterminer le rang de $f - 6\mathrm{id}$. En déduire une valeur propre de A ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
   - 1.b. Posons $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi que $U = AV - 2V$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
     - 1.b.i. Montrer que U est vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.
     - 1.b.ii. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
     - 1.b.iii. Déterminer la matrice de f dans cette base, notée T.
     - 1.b.iv. Donner alors une matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
   - 1.c. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
2. **Système différentiel.**

   On considère le système différentiel suivant : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) & = & x(t) - y(t) + 2z(t) \end{array} \right.$. d'inconnues $x, y, z \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on admet que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
   - 2.a. Vérifier que pour tout réel t : $X'(t) = AX(t)$.
   - 2.b. On note, pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et on admet que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
   Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Y'(t) = TY(t)$.
   - 2.c. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \longmapsto cte^{2t}$ est solution de l'équation différentielle $f' = 2f + ce^{2t}$.

2.d. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $Y(t)$ en fonction de t.

2.e. Montrer alors qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array}\right.$$

2.f. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(x_0 - y_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(y_0 - z_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ z(t) & = & \big((x_0 - y_0)t + z_0\big) e^{2t} \end{array}\right.$$

2.g. Que dire si $x(0) = y(0)$?

●●○○ Exercice 10 - EDL3 homogène à coefficients constants

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \ \ ; \ \ y''(0) = 0 \end{array}\right.$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note, pour tout réel x, $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Y'(x) = AY(x)$.
2. **Diagonalisation de A.**

2.a. Déterminer les réels λ de sorte que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

2.b. Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\ker(A - \lambda I_3)$. *On prendra, si possible, des matrices colonnes dont la première composante vaut 1.*

2.c. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

2.d. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera D la matrice obtenue.*

3. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$. On admet qu'il existe trois fonctions u, v, w, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x : $Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ et $Z'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \\ w'(x) \end{pmatrix}$.

3.a. Déterminer $Z(0)$.

3.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Y'(x) = AY(x) \iff Z'(x) = DZ(x)$$

3.c. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$.

4. Conclure sur le problème de Cauchy initial.

●●●○ Exercice 11 - EDL2 avec système différentiel

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Redémontrer le théorème concernant les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ à l'aide des systèmes différentiels.

●●○○ Exercice 12 - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.

1.a. Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$?
Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que f n'est pas la fonction constante nulle.

1.b. Déterminer $f(0)$.

1.c. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - f(0)}{h}$$

1.d. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.

1.e. Conclure sur les candidats-solutions.

2. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
3. Conclure.

●●○○ Exercice 13 - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1 \quad ; \quad f(0) = -4 \qquad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations $(\star)$. Posons $g : x \longmapsto f(x)f(-x)$.
   - 1.a. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.
   - 1.b. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
   - 1.c. Conclure sur les candidats-solutions.
2. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
3. Conclure.

●●○○ Exercice 14 - EDHEC 2023 E

Partie 1. Propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérer comme une densité.
   On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.
2. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F(x)$ en fonction de c.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.
   - 3.a. Déterminer, en distinguant les cas $x \geq 1$ et $x < 1$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leq tx])$.
   - 3.b. En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[X > t]$ est la loi de X.

Partie 2. Réciproque de la propriété précédente.

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty; 1[$, strictement positive et continue sur $[1; +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans la suite, on suppose que pour tout $t > 1$:

- $\mathbb{P}([Y > t]) > 0$
- la loi de $\dfrac{Y}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[Y > t]$ est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.
5. 5.a. Établir :
   $$\forall x \geq 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$
   - 5.b. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et en déduire :
   $$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$
   - 5.c. Montrer enfin :
   $$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$
6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$. On note (E_1) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 1$.
   Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.
   - 6.a. Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1; +\infty[$.
   - 6.b. En notant K la constante évoquée à la question précédente, donner toutes les solutions de (E_1).
   - 6.c. Trouver une fonction u, constante sur $]1; +\infty[$, et solution de (E_2).
   - 6.d. Montrer que y est solution de (E_2) si, et seulement si, $y - u$ est solution de (E_1).
   - 6.e. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions y définies par : $\forall t > 1,\ y(t) = 1 + \dfrac{K}{t^c}$.
7. 7.a. Montrer finalement que l'on a : $\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \dfrac{1}{t^c}$.
   - 7.b. Vérifier que la relation s'étend à $[1; +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.