8

Analyse

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Introduction...

Pour bien démarrer...

1 # **Définitions.**

1. Équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants :

2. Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL :

2 # Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et b une fonction continue sur I. Résolution de $y' + ay = b$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.

3 # Soient $a, b \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et c une fonction continue sur I. Résolution de $y'' + ay' + by = c$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.

4 # Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ? Qu'en dire ?

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

I Généralités

I.1 Systèmes différentiels

Définitions 1 – Systèmes différentiels, solution

D1# Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $b_1, \dots, b_n$ des fonctions définies et continues sur I.
On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants de taille n** tout système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & + & b_1 \\ x_2' & = & a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & + & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & & & \\ x_n' & = & a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & + & b_n \end{array}\right.$$

où $x_1, \dots, x_n \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont les fonctions inconnues.
En notant :

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$,
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$,
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

le système différentiel peut se réécrire :

$$X' = AX + B$$

> **Vocabulaire**
> Les réels $a_{i,j}$ sont les **coefficients** du système différentiel.

> **✘ Attention !**
> Il s'agit d'égalités de fonctions !

> **☞ Pour info...**
> En fait, X' n'est pas qu'une notation... Si l'on définissait une *norme* sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ce n'est pas ce qui manque), on pourrait donner une définition de dérivabilité pour les fonctions $X : I \to \mathbb{R}^n$.

> **✘ Attention !**
> A est une matrice carrée de réels, X, X' et B sont des fonctions de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $X' = AX + B$ est une égalité de fonctions !

D2# Un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** est un système linéaire de la forme $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X : I \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes sont des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I inconnues.

> **Petite remarque**
> Le programme d'ECG ne semble porter que sur les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants...

D3# Une **solution** du système différentiel $X' = AX + B$ est une application $Y : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

- chaque composante est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- $\forall t \in I, \ Y'(t) = AY(t) + B(t)$.

Résoudre un système différentiel, c'est trouver toutes ses solutions.

Exemples 1

E1 Réécrivons l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sous forme de système différentiel.

E2 Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Résolvons le système différentiel $X' = AX$.

$\boxed{\text{E3}}$ Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résolvons le système différentiel $X' = AX$.

Théorème 1 - de Cauchy-Lipschitz sur système différentiel

Avec les notations précédentes, si $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors le problème $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ d'inconnue $X \in \mathscr{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ possède une et une seule solution.

Vocabulaire
Un tel problème est appelé **problème de Cauchy**, et on avait un résultat analogue dans le cas des EDL1 et EDL2.

Démonstration : Théorème admis.

Exemples 2

E1 Montrons que si X est une solution non nulle de $X' = AX$ sur I, alors X ne s'annule pas sur I.

E2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons l'unique solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} X' = \lambda X \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

I.2 Structure de l'ensemble des solutions

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires, on retrouve :

Propriétés 1 - Structure de l'ensemble des solutions d'un SDL

Soient (E) une système différentiel linéaire de taille n et (E_H) son système différentiel linéaire homogène associé.
Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H).

P1# S_H est un espace vectoriel

P2# Si $t_0 \in I$, alors l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} S_H & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X(t_0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

P3# Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H). Autrement dit :

solution générale du SDL	=	solution particulière du SDL	+	solution générale du SDL homogène associé

Ou encore, en notant X_p une solution particulière de E :

$$S_E = \left\{ X_p + X_H \ / \ X_H \in S_H \right\}$$

Conséquence :
On obtient : $\dim(S_H) = n$.

Petite remarque
Comme dans le cas des EDL, cette structure nous guide sur la méthode de résolution des SDL.

⋆ Démonstration :

⋆

Propriété 2 – Principe de superposition

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que $B_1, B_2 \in \mathscr{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Si X_1 est une solution de $X' = AX + B_1$ et X_2 est une solution de $X' = AX + B_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est une solution de $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$.

⋆ Démonstration :

⋆

I.3 Équilibres et trajectoires

Définition 2 – Équilibre d'un SDL

Un **équilibre** (ou état d'équilibre, ou point d'équilibre) d'un système différentiel est une solution constante de ce système.

À retenir... La fonction $t \longmapsto 0_{n,1}$ est un équilibre de tous les systèmes différentiels homogènes.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Supposons que le système $X' = AX + B$ possède un équilibre noté X_0. Dans ce cas : $\forall t \in I,\ X_0'(t) = 0$, et on obtient alors :

$$AX_0 = -B$$

Nécessairement :

- B est constante,
- $B \in \mathrm{Im}(A)$.

Maintenant, considérons $X \in \mathscr{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. On a :

$$\begin{aligned}
\big((X + X_0) \text{ est solution de } X' = AX + B\big) &\iff (X + X_0)' = A(X + X_0) + B \\
&\iff X' + X_0' = AX + AX_0 + B && \text{linéarité de la dérivation} \\
&\iff X' = AX + AX_0 + B && X_0 \text{ est constante} \\
&\iff X' = AX && X_0 \text{ équilibre de } X' = AX + B\text{, donc } AX_0 = -B
\end{aligned}$$

Intéressons-nous donc plus particulièrement aux équilibres des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

Propriété 3

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
La fonction $t \longmapsto Y_0$ est un équilibre de $X' = AX$ si, et seulement si $Y_0 \in \ker(A)$.

À retenir... Si A est inversible, alors la fonction $t \longmapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.

⋆ Démonstration : Notons $Y : t \longmapsto Y_0$ définie sur $\mathbb{R}$. Chaque composante de Y étant constante, elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a ensuite :

$$\begin{aligned}
\big(Y \text{ est un équilibre de } X' = AX\big) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = AY(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 0 = AY(t) && Y \text{ est constante, donc : } \forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = 0 \\
&\iff AY_0 = 0 && Y \text{ est constante égale à } Y_0 \\
&\iff Y_0 \in \ker(A)
\end{aligned}$$

⋆

Exemple 3

Déterminons les équilibres du système différentiel : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & y & + & z \\ y' & = & x & & & + & z \\ z' & = & 2x & + & y & + & 2z \end{array}\right.$

Définition 3 - Trajectoire d'un SDL

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une **trajectoire** de $X' = AX$ est un ensemble $\left\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$, où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une solution de $X' = AX$.

Petite remarque

Une trajectoire associée à un équilibre est réduit à un point de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si deux trajectoires de $X' = AX$ ont un point commun, alors elles sont confondues.
Autrement dit, deux trajectoires de $X' = AX$ sont soit distinctes, soit confondues.

⋆ Démonstration :

⋆

Définitions 4 - Trajectoire convergente, divergente

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution de $X' = AX$.

D1# La trajectoire $\left\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$ est **convergente** lorsqu'il existe $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall i \in [\![1; n]\!], \ \lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i$.
On dit alors que la trajectoire $\left\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$ converge vers $(\ell_1, \dots, \ell_n)$.

D2# La trajectoire $\left\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$ est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

♣ Méthode !

Pour montrer qu'une trajectoire est divergente, il suffit d'établir qu'une de ses composantes tend vers $\pm\infty$...

Exemple 4

Voyons comment résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & 2x & + & y & + & z \\ y' & = & x & + & 2y & + & z \\ z' & = & x & + & y & + & 2z \end{array}\right.$.

- Justifions que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

- Déterminons les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

- Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et V un vecteur propre de A associé à λ. Montrons que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t} V$ est solution de $X' = AX$.

- Déduisons-en l'ensemble des solutions de $X' = AX$.

- Donnons finalement une trajectoire convergente et une trajectoire divergente de $X' = AX$.

II Cas où A est diagonalisable

L'objectif est de résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est une matrice diagonalisable. Nous allons donner l'ensemble des solutions et voir deux démonstrations du résultat, dont la première utilise le lemme 1 ci-dessous.

Important !
• Dans le cas où A est diagonalisable, l'énoncé pourra ne donner aucune étape intermédiaire dans la résolution de $X' = AX$. Il faudra alors mettre en œuvre la méthode de l'exemple 5 (et la seconde méthode de démonstration du théorème 2).
• Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, l'énoncé guidera.

Lemme 1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et V un vecteur propre de A associé à λ.
La fonction $t \longmapsto e^{\lambda t}V$ est solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Notons $Y : t \longmapsto e^{\lambda t}V$. Puisque V est constant, la fonction Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda e^{\lambda t} V \\ &= e^{\lambda t}\lambda V \\ &= e^{\lambda t} A V \quad \text{V est vecteur propre de A associé à λ} \\ &= A \times \left(e^{\lambda t} V\right) \\ &= AY(t) \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto e^{\lambda t}V$ est donc solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.

Petite remarque
On peut s'imaginer la tête de Y sinon, pour se rendre compte de l'expression de $Y'(t)$...

Théorème 2 - Résolution de $X' = AX$, cas où A est diagonalisable (HP)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.
Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.

On a ainsi :

$$\big(X \text{ est solution de } X' = AX\big) \iff \left(\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} V_i\right)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de $X' = AX$ est $\left\{ t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n \ / \ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$.

Important !
Puisque A est diagonalisable, il existe bien une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

★ Démonstration :

$\star$

Ce théorème semble être hors programme, en revanche, les deux démonstrations fournissent deux méthodes classiques pour résoudre des systèmes différentiels dans des cas pratiques. Mettons en application la seconde méthode sur l'exemple suivant :

Exemple 5

Résolvons le système différentiel $\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & 2x & - & y \\ y' & = & 3x & + & 6y \end{array}\right.$ d'inconnues $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En conséquence du théorème 2, un résultat sur le comportement des trajectoires quand $t \to +\infty$:

Théorème 3 - Comportement des trajectoires, cas où A est diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.

T1# Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors $X' = AX$ possède des trajectoires divergentes.

T2# Si les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers un équilibre (pas nécessairement le même).

T3# Si les valeurs propres de A sont strictement négatives, alors toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers $(0, \dots, 0)$, seul équilibre du système différentiel.

Confusion d'objets !
Une trajectoire est un élément de $\mathbb{R}^n$ et un équilibre un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$... On comprend bien l'idée tout de même !

Démonstration : Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (licite, car A est diagonalisable) telle que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i,
- pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, x_k la k-ième composante de X (où X est une solution de $X' = AX$) et, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $v_{i,k}$ la k-ième composante de V_i.

T1# Supposons que A possède au moins une valeur propre strictement positive. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons que $\lambda_1 > 0$.
D'après le lemme 1, la fonction $t \longmapsto e^{\lambda_1 t} V_1$ est solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.
Or :

- $\lambda_1 > 0$, donc par produit et composition :
$$\lim_{t \to +\infty} e^{\lambda_1 t} = +\infty$$
- V_1 est vecteur propre de A, donc V_1 est non nul. Il existe donc $k \in [\![1;n]\!]$, que nous considérons ensuite, tel que la k-ième composante de V_1 soit non nulle.

Par produit, on obtient :
$$\lim_{t \to +\infty} e^{\lambda_1 t} v_{1,k} = \pm\infty$$
Par conséquent : la trajectoire associée à $t \longmapsto e^{\lambda_1 t} V_1$ est divergente.

T2# Supposons que les valeurs propres de A sont négatives ou nulles. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons :
$$\forall i \in [\![1;p]\!],\ \lambda_i = 0 \quad ; \quad \forall i \in [\![p+1;n]\!],\ \lambda_i < 0$$
Soit X une solution de $X' = AX$. D'après le théorème 2, il existe des réels $c_1, \dots, c_n$ tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} V_i$$
Or :

- Pour tout $i \in [\![p+1;n]\!]$, $\lambda_i < 0$. D'où, par produit et composition :
$$\forall i \in [\![p+1;n]\!],\ \lim_{t \to +\infty} e^{\lambda_i t} = 0$$
D'où :
$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \forall i \in [\![p+1;n]\!],\ \lim_{t \to +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = 0$$
- Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\lambda_i = 0$. D'où :
$$\forall i \in [\![1;p]\!],\ \forall t \in \mathbb{R},\ c_i e^{\lambda_i t} V_i = c_i V_i$$
Et ainsi :
$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \forall i \in [\![1;p]\!],\ \lim_{t \to +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = c_i v_{i,k}$$

Petite remarque
Les cas où 0 est seule VP et où 0 n'est pas VP sont inclus (en considérant $p = n$ et $p = 0$ respectivement).
Dans le cas où $p = 0$, chaque somme $\sum_{i=1}^{p} (\dots)$ sera nulle, par convention.

On obtient finalement par somme :
$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lim_{t \to +\infty} x_k(t) = \sum_{i=1}^{p} c_i v_{i,k}$$
Par conséquent : la trajectoire associée à X converge vers $\sum_{i=1}^{p} c_i V_i$.

Notons $V = \sum_{i=1}^{p} c_i V_i$ et montrons que V est un équilibre de $X' = AX$.
On sait que, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre 0. Donc : $\forall i \in [\![1;p]\!],\ V_i \in \ker(A)$.
Mais $\ker(A)$ est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire. Ainsi :
$$V \in \ker(A)$$
D'après la propriété 3, on en déduit que la fonction $t \longmapsto V$ est un équilibre de $X' = AX$.
Conclusion : toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers un équilibre.

T3# Cas particulier de la démonstration précédente, dans le cas où $p = 0$...
On obtient :
$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lim_{t \to +\infty} x_k(t) = 0$$
Par conséquent : la trajectoire associée à X converge vers $(0, \dots, 0)$.
Bien évidemment, $t \longmapsto 0_{n,1}$ est un équilibre de $X' = AX$. Et c'est le seul ! En effet, les valeurs propres de A sont strictement négatives, donc 0 n'est pas valeur propre de A. Ainsi, $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$. Et donc, d'après la propriété 3, $t \longmapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.