Grand classique
Lois sans mémoire

Définitions 1 - Lois sans mémoire

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

D1# Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on dit que la loi de X est sans mémoire lorsque :

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > n]) \neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}_{[X>n]}([X > n + m]) = \mathbb{P}([X > m])$$

D2# Si $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$, on dit que la loi de X est sans mémoire lorsque :

$$\forall x, t \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}([X > x]) \neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + t]) = \mathbb{P}([X > t])$$

Théorème 1 - Lois sans mémoire discrètes

Les seules lois sans mémoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sont les lois géométriques.

⋆ Démonstration :Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Le résultat à établir se reformule ainsi :

$$\text{la loi de } X \text{ est sans mémoire si, et seulement si : } \exists p \in]0;1[\ / \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1}p$$

1. Démontrons que :

$$\text{la loi de } X \text{ est sans mémoire si, et seulement si :}$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > n]) \neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}([X > n + m]) = \mathbb{P}([X > n]) \times \mathbb{P}([X > m]).$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X>n]}([X > n + m]) &= \frac{\mathbb{P}\big([X > n] \cap [X > n + m]\big)}{\mathbb{P}([X > n])} && m \geq 0, \text{ donc } [X > n + m] \subset [X > n] \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > n + m])}{\mathbb{P}([X > n])} \end{aligned}$$

Et puisque $\mathbb{P}([X > n]) \neq 0$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X>n]}([X > n + m]) = \mathbb{P}([X > m]) \iff \mathbb{P}([X > n + m]) = \mathbb{P}([X > n]) \times \mathbb{P}([X > m])$$

D'où l'équivalence voulue.

Conclusion : la loi de X est sans mémoire si, et seulement si : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > n]) \neq 0$ ET $\mathbb{P}([X > n + m]) = \mathbb{P}([X > n]) \times \mathbb{P}([X > m])$.

Détails
Soit $\omega \in \Omega$.
Supposons $\omega \in [X > n + m]$.
Dans ce cas : $X(\omega) > n + m$.
Mais $m \geq 0$, donc $X(\omega) > n$.
Ainsi $\omega \in [X > n]$.
Ce qui prouve :

$$[X > n + m] \subset [X > n]$$

Reformulation : dire "il fait + de 20°et + de 25°" équivaut à dire "il fait + de 25°".

2. Ensuite, raisonnons par double-implication.

2.a. Supposons qu'il existe $p \in]0;1[$ tel que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Notons $q = 1 - p$.

2.a.i. Calculons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([X > N])$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$[X > N] = \bigcup_{k=N+1}^{+\infty} [X = k]$$

Puis, par incompatibilité des évènements de la famille $\big([X = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$, la série $\sum_{k \geq N+1} \mathbb{P}([X = k])$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > N]) &= \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=N+1}^{+\infty} q^{k-1}p && i = k - (N+1) \\ &= p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+N} \\ &= pq^N \frac{1}{1-q} && \text{p=1-q} \\ &= q^N \end{aligned}$$

Pour l'oral...
On peut se souvenir de l'expression de $\mathbb{P}([X > N])$ dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, que l'on retrouve régulièrement. A l'écrit, on détaille le calcul.

2.a.ii. Concluons que la loi de X est sans mémoire.
Soient $n, m \in \mathbb{N}$.
Puisque $p \in]0;1[$, on a $q \neq 0$ et donc, d'après ce qui précède, $\mathbb{P}([X > n]) = q^n \neq 0$. Ensuite, puisque $n + m \in \mathbb{N}^*$, d'après le point précédent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > n + m]) &= q^{n+m} \\ &= q^n q^m && \text{point précédent} \\ &= \mathbb{P}([X > n]) \times \mathbb{P}([X > m]) \end{aligned}$$

Et d'après la question **1.**, la loi de X est sans mémoire.
Conclusion : la loi de X est sans mémoire.

Conclusion : on a démontré que les lois géométriques sont sans mémoire.

2.b. Supposons que le loi de X est sans mémoire.

2.b.i. Montrer que la suite $\left(\mathbb{P}([X>n])\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'existence d'un réel $q\in]0;1[$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}([X>n])=q^n$.

- Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque la loi de X est sans mémoire, d'après la question **1.**, on a :
$$\mathbb{P}([X>n+1])=\mathbb{P}([X>1])\mathbb{P}([X>n])$$
Par conséquent, la suite $\left(\mathbb{P}([X>n])\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\mathbb{P}([X>1])$.
- En notant $q=\mathbb{P}([X>1])$, on a alors :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}([X>n])=\mathbb{P}([X>0])q^n$$
Or $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{P}([X>0])=1$. D'où :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}([X>n])=q^n$$
- Enfin :
  - ◇ $q\neq 0$, sinon on aurait : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}([X>n])=0$: contredit la définition de loi sans mémoire ;
  - ◇ $q\neq 1$, sinon on aurait $p=0$ et ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=n])=0$...

♣ L'idée !
On s'aide du résultat voulu... Si X suit la loi géométrique de paramètre p, alors : $\mathbb{P}([X=1])=p$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X>n])=q^n$, où $q=1-p$. Il nous suffira ensuite de retrouver $\mathbb{P}([X=n])$.

2.b.ii. Démontrons enfin que X suit la loi géométrique de paramètre $p=1-q$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- Puisque X est à valeurs entières, on a :
$$[X\geq n]=[X=n]\cup[X>n]$$
Or, les évènements $[X=n]$ et $[X>n]$ sont incompatibles, d'où :
$$\mathbb{P}([X\geq n])=\mathbb{P}([X=n])+\mathbb{P}([X>n])$$
- Et ainsi :
$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([X=n]) & = & \mathbb{P}([X\geq n])-\mathbb{P}([X>n]) & \\ & = & \mathbb{P}([X>n-1])-\mathbb{P}([X>n]) & X \text{ est à valeurs entières} \\ & = & q^{n-1}-q^n & \text{résultat précédent, licite car } n-1,n\in\mathbb{N}\ (n\in\mathbb{N}^*) \\ & = & q^{n-1}(1-q) & \\ & = & q^{n-1}p & \end{array}$$

Conclusion : X suit la loi géométrique de paramètre p.

Conclusion : on a démontré que les lois sans mémoire discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sont géométriques.

Conclusion : les lois sans mémoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sont les lois géométriques.

⋆

Théorème 2 - Lois sans mémoire à densité

Les seules lois à densité sans mémoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ sont les lois exponentielles.

⋆ Démonstration : Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telle que $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$. Notons F_X la fonction de répartition de X.

1. Supposons qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}_*^+$ tel que $X\hookrightarrow\mathscr{E}(\lambda)$. Montrons que X est sans mémoire.
   - Pour tout $y\in\mathbb{R}^+$, on a :
$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([X>y]) & = & 1-\mathbb{P}([X\leq y]) & \\ & = & 1-F_X(y) & \\ & = & 1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}) & y\in\mathbb{R}^+ \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda y} & \end{array}$$
   - Soient $x,t\in\mathbb{R}^+$. D'après le point précédent, on a ainsi $\mathbb{P}([X>x])=\mathrm{e}^{-\lambda x}\neq 0$ et ainsi :
$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}_{[X>x]}([X>x+t]) & = & \dfrac{\mathbb{P}\left([X>x]\cap[X>x+t]\right)}{\mathbb{P}([X>x])} & \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}([X>x+t])}{\mathbb{P}([X>x])} & t\geq 0, \text{ donc } [X>x+t]\subset[X>x] \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} & \text{point précédent, licite car } x,x+t\in\mathbb{R}^+ \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda t} & \\ & = & \mathbb{P}([X>t]) & \text{point précédent, licite car } t\in\mathbb{R}^+ \end{array}$$

   Par conséquent :
$$\forall x,t\in\mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}([X>x])\neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}_{[X>x]}([X>x+t])=\mathbb{P}([X>t])$$
   Conclusion : la loi de X est sans mémoire.

   Conclusion : les lois exponentielles sont sans mémoire.

2. Supposons que la loi de X est sans mémoire. Supposons également que F_X est dérivable en 0 à droite et $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et notons $\lambda=F_X'(0)$.
   Autrement dit, supposons : $\forall x,t\in\mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}([X>x])\neq 0$ ET $\mathbb{P}_{[X>x]}([X>x+t])=\mathbb{P}([X>t])$. Déterminons F_X. Notons $G_X:x\longmapsto 1-F_X(x)$.

☞ Pour info...
On pourrait se dispenser de cette hypothèse si on était en mesure de résoudre l'équation fonctionnelle de Cauchy dans le cas d'une fonction simplement continue : elle est vérifiée par la fonction $x\longmapsto\mathbb{P}([X>x])$ (**fonction de survie**). Mais il nous manque une notion importante : la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

2.a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Établissons : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ G_X(x+t) = G_X(x)G_X(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+t]) & = & \dfrac{\mathbb{P}\left([X>x] \cap [X>x+t]\right)}{\mathbb{P}([X>x])} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}([X>x+t])}{\mathbb{P}([X>x])} \\ & = & \dfrac{G_X(x+t)}{G_X(x)} \end{array}$$

$t \geq 0$, donc $[X > x+t] \subset [X > x]$

On la loi de X est sans mémoire, donc :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+t]) = \mathbb{P}([X > t])$$

D'après ce qui précède, on obtient :

$$G_X(x+t) = G_X(x)G_X(t)$$

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ G_X(x+t) = G_X(x)G_X(t)$.

☞ **Pour info...**
C'est celle-ci l'équation de Cauchy...

2.b. Déduisons-en que pour tout $x \in \mathbb{R}^+,\ G'_X(x) = -\lambda G_X(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ G_X(x+t) = G_X(x)G_X(t)$$

Or F_X est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc G_X également puis, en dérivant par rapport à la variable t, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ G'_X(x+t) = G_X(x)G'_X(t)$$

Puis, en évaluant en $t = 0$ (licite car $x \geq 0$) :

$$G'_X(x) = G_X(x)G'_X(0)$$

Or $F'_X(0) = \lambda$, donc $G'_X(0) = -\lambda$.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}^+,\ G'_X(x) = -\lambda G_X(x)$.

2.c. Démontrons enfin que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

- Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$, on a déjà : $\forall x \in]-\infty; 0[,\ F_X(x) = 0$.
- D'après la question précédente, la fonction G_X est solution de l'équation différentielle $y' + \lambda y = 0$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
  Il existe donc un réel a, que nous considérons ensuite, tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ G_X(x) = a\mathrm{e}^{-\lambda x}$. D'où :
  $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F_X(x) = 1 - a\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Or $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$, donc $F_X(0) = 0$. Ce qui donne : $a = 1$.
Enfin, puisque F_X est une fonction de répartition, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$. Ainsi, nécessairement : $\lambda > 0$.

Petite remarque
On peut raisonner rapidement par l'absurde si besoin.

Conclusion : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+_* \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Conclusion : on a démontré que les lois sans mémoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ sont des lois exponentielles.

Conclusion : les lois sans mémoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ sont les lois exponentielles.

⋆