9

Probabilités

Lois à densité usuelles

Introduction...

Pour bien démarrer...

1 # Bien revoir le chapitre 6 (et donc le chapitre 5...).

2 # Rappels de cours sur les VA à densité :

- **Définition.** X est à densité lorsque :

- **Définition.** Une fonction f est une densité de probabilité lorsque :

- Liens densité / fonction de répartition d'une VA :

- Si X est de densité f, alors $\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) =$

- Espérance d'une VA à densité de densité f :

- Théorème de transfert :

Ce chapitre est un inventaire des lois à densité usuelles. Nous commençons par résumer les informations sur les lois dans ce tableau, puis nous continuerons sur des résultats de stabilité. Quelques démonstrations seront faites en exercice…

Nom & notation	$X(\Omega)$	Densité	Fonction de répartition	Espérance & variance
Uniforme sur $[a;b]$ $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$ $X\hookrightarrow\mathscr{U}\big([a;b]\big)$ *On adapte dans les cas $]a;b]$, $[a;b[$ et $]a;b[$, mais espérance et variance restent identiques.*	$[a;b]$	$f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a;b] \\ 1 & \text{si } x>b \end{cases}$	$\mathbb{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$ $\mathbb{V}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle de paramètre λ $\lambda>0$ $X\hookrightarrow\mathscr{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$	$F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$	$\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $\mathbb{V}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale centrée réduite $X\hookrightarrow\mathscr{N}(0;1)$	$\mathbb{R}$	$f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	Pas d'expression *(souvent notée Φ)*, mais : $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(-x)=1-\Phi(x)$	$\mathbb{E}(X)=0$ $\mathbb{V}(X)=1$
Normale de paramètres μ et σ^2 $X\hookrightarrow\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ On en déduit : $X\hookrightarrow\mathscr{N}(\mu;\sigma^2) \iff \dfrac{X-\mu}{\sigma}\hookrightarrow\mathscr{N}(0;1)$	Puisque $X\hookrightarrow\mathscr{N}(\mu;\sigma^2) \iff \dfrac{X-\mu}{\sigma}\hookrightarrow\mathscr{N}(0;1)$ on a : $F_X(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\mathbb{E}(X)=\mu$ $\mathbb{V}(X)=\sigma^2$

Deux résultats supplémentaires :

Propriété 1 – Méthode d'inversion pour la loi exponentielle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0;1[\big)$, alors $\dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-X) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

⋆ Démonstration : Voir QC30. ⋆

Propriétés 2 – Stabilité des lois normales

P1# Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_*^+$ ainsi que X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.
On a :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_1; \sigma_1^2) \\[2ex] X_2 \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_2; \sigma_2^2) \\[2ex] X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

P2# Soient $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels, $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs ainsi que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.
On a, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_k; \sigma_k^2) \\[2ex] X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2)$$

⋆ Démonstration :

P1# Voir la fiche hors programme dédiée au produit de convolution.

P2#

⋆

Et pour terminer, voici comment lire la table d'une $\mathscr{N}(0;1)$. Le tableau ci-dessous contient des valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Lecture...

- En sélectionnant la ligne "1.6" et la colonne "0,04", on obtient $\Phi(1,64) \simeq 0,9495$.
- Pour avoir $\Phi(-1)$, on utilise : $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$... et, à l'aide du tableau : $\Phi(1) \simeq 0,8413$.