Exercices du chapitre 6
Variables aléatoires à densité

●●○○ Exercice 1 - Ni discrète ni à densité

On considère la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On considère alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont la fonction de répartition est F. Notons Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) < 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geq 0 \end{cases}$$

2. Déterminer la fonction de répartition de Y.
3. En déduire que Y n'est ni discrète ni à densité.

●○○○ Exercice 2 - Densité ?

Dans chaque cas, déterminer si la fonction f est une densité de probabilité. Si c'est le cas, déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X admettant f comme densité.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
2. $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
3. $f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f : x \longmapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1;0[\\ 1-x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
5. $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \in [0; e-1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
6. $f : x \longmapsto \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x \in]0; e-1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
7. $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x^4} & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1;1[\\ \dfrac{1}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

●●○○ Exercice 3

Dans chaque cas, déterminer (si possible) le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \in [0;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0;a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f : x \longmapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-a;a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

●●○○ Exercice 4

On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X. Construire sa représentation graphique.
3. Calculer les probabilités : $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{2} \leq X \leq \dfrac{3}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}_{[X \geq \frac{1}{2}]}\left(\left[X \leq \dfrac{3}{2}\right]\right)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(1-X)$ puis en déduire l'espérance de X.
5. Calculer de même le moment d'ordre 2 de X.

●●○○ Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{|t|}{(1+t^2)^2}$.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Montrer que f est une densité de probabilité. *Soit alors X une variable aléatoire de densité f.*
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

5. A l'aide d'un changement de variable, justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt$ est convergente et que

$$\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt = -\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$$

6. Déduire des questions précédentes que X admet une espérance et en donner la valeur.
7. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

●●○○ Exercice 6 - Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} a\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{si } x < b \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. 3.a. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{ab}{a-1}$$

3.b. Montrer que X admet une variance si, et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

4. Établir : $\forall y \in \mathbb{R}^+, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = 1$.

●●○○ Exercice 7 - Loi de Gumbel

On considère la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x-\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire Z.
2. Déterminer la fonction de répartition de Z.
3. 3.a. Justifier que Z possède une espérance.

3.b. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u} du$. On note $-\gamma$ sa valeur.

3.c. A l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^{-x}$, démontrer : $\mathbb{E}(Z) = \gamma$.

Dans toute la suite, a et b sont des réels tels que $b > 0$. On considère à présent la fonction $F_{a,b} : x \longmapsto \exp\left(-\exp\left(\dfrac{a-x}{b}\right)\right)$.

4. Démontrer que $F_{a,b}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Gumbel de paramètres a et b lorsqu'elle admet $F_{a,b}$ comme fonction de répartition, et on notera $X \hookrightarrow \mathscr{G}(a; b)$.
5. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(a; b)$. Reconnaître la loi de $\dfrac{X-a}{b}$.
6. En déduire l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{G}(a; b)$.

●●○○ Exercice 8 - Ecricome 2015 E

O note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. **Étude de la fonction f.**

1.a. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

1.b. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0; +\infty[$.

1.c. Étudier la convexité de f sur $[0; +\infty[$.

1.d. Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$. *Donnée : $e^{-1} \simeq 0,37$.*

2. **Étude d'une première variable aléatoire.**

2.a. Montrer que f est une densité de probabilité.
On note alors X une variable aléatoire de densité f dont la fonction de répartition est notée F.

2.b. Sans calcul, justifier que la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.c. Montrer que pour tout réel x : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2.d. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, que l'on calculera.

3. **Étude d'une seconde variable aléatoire.**
On considère maintenant la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$.

3.a. Déterminer la fonction de répartition, notée G, de la variable aléatoire Y.

3.b. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3.c. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

●●○○ Exercice 9 - EML 2003 E

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ converge et donner sa valeur.
2. Montrer que f est une fonction de densité. Dans la suite X désigne une variable aléatoire de densité f.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 indépendantes et toutes de même loi que X.

5. On pose $U = \min(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une variable aléatoire.
   - 5.a. Montrer que U est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.
   - 5.b. Montrer que U admet une espérance et la calculer.
6. On pose $V = \max(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une variable aléatoire.
   - 6.a. Montrer que V est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
   - 6.b. La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?

●●○○ Exercice 10 - Ecricome 2019 E

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{t^3} & \text{si } \ t \leq -1 \\ 0 & \text{si } \ -1 < t < 1 \\ \dfrac{1}{t^3} & \text{si } \ t \geq 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et calculer sa valeur.
3. 3.a. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $A > 1$, on a :
   $$\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt = \int_1^A f(u)\ du$$
   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$ est convergente et donner sa valeur.
   - 3.b. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité et on note F_X sa fonction de répartition.
   - 4.a. Montrer que, pour tout réel x, on a :
   $$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } \ x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } \ -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$
   - 4.b. Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
   - 4.c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.
   - 5.a. Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
   - 5.b. Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } \ x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   - 5.c. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

●●○○ Exercice 11 - EML 2001 E

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction $f_n : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

1. 1.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.
   - 1.b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)dt$.
   - 1.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 1$.
   - 1.d. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X_n.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n possède une espérance et une variance et que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{V}(X_n) = n + 1$.
3. Pour tout réel $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute entre les instants 0 et t.
   On suppose que Y_t suit la loi de Poisson de paramètre t.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_n prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et égale à l'instant d'arrivée de la n-ième voiture au péage à partir de l'instant 0.
   3.a. Rappeler, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la loi de Y_t ainsi que son espérance et sa variance.
   3.b. Soient $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Établir : $[Z_n \leq t] = [Y_t \geq n]$.
   3.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de Z_n.
   3.d. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction f_{n-1}.

●●○○ Exercice 12 - ESC 2001 E

1. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$.
   1.a. Calculer, pour $A \geq 1$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(t)}{t} dt$ puis en déduire que I_1 est divergente.
   1.b. Montrer, grâce à une intégration par parties, que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'intégrale I_n est convergente et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.
   1.c. Étudier les variations de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[2; +\infty[$ et donner sa limite en $+\infty$. On donne $\sqrt{e} \simeq 1,65$.
   1.d. En déduire, grâce à I_2, que $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$ converge. On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.
   2.a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est une densité de probabilité. Dans toute la suite, X est une variable aléatoire de densité g.
   2.b. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.
   2.c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
   2.d. On considère la fonction $G : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \dfrac{2\ln(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.
   Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est la fonction de répartition de X.
3. On pose $Z = \lfloor X \rfloor$.
   3.a. Justifier que Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   3.b. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Z = k]) = G(k+1) - G(k)$.
   3.c. En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([Z = k]) = -(n+1)\big(1 - G(n+1)\big) + \sum_{k=0}^{n} \big(1 - G(k+1)\big)$$
   3.d. Montrer : $\big(1 - G(k)\big) \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(k)}{k^2}$.
   3.e. Déduire des deux questions précédentes que la variable aléatoire Z admet une espérance.

●●○○ Exercice 13 - Une autre expression de l'espérance...

On considère une variable aléatoire à densité X, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, admettant une espérance notée $\mathbb{E}(X)$.
On note f_X une densité de X et F_X sa fonction de répartition.

1. Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t f_X(t) dt$.
2. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_x^{+\infty} t f_X(t) dt \geq x\big(1 - F_X(x)\big) \geq 0$.
3. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties :
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big) dt$$

●●○○ Exercice 14 - Type oral

1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{c}{1 + x^2}$ est une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire de densité f.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
3. Montrer que les variables aléatoires X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.