Concours blanc - Épreuve 1

Samedi 18 novembre - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"*Chaque homme sait une quantité prodigieuse de choses qu'il ignore qu'il sait.*"
Paul Valéry

Exercice 1

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.
3. Démontrer que la matrice A est diagonalisable et préciser une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ telle que :

$$A = PD_AP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer P^{-1}.
5. Calculer BP. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}$$

6. Déduire des questions précédentes que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Exercice 2

1. Donner un exemple d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel $K \in]0; 1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq K|x-y| \qquad (\star)$$

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente. On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. A l'aide de la relation $(\star)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet au plus une solution.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée d'un réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - 4.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n|u_1 - u_0|$$
   - 4.b. Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.
   - 4.c. Conclure que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution.
5. On désigne par n et p des entiers naturels tels que $p \geq 1$.
   - 5.a. Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.
   - 5.b. En déduire l'inégalité :
   $$|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \frac{1-K^p}{1-K}|u_1 - u_0|$$
   - 5.c. Établir enfin :
   $$|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1-K}|u_1 - u_0|$$
6. **Étude d'un exemple.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \frac{1}{1+e^t}$$
   - 6.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
   - 6.b. Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \ |f'(t)| \leq \frac{1}{4}$$

6.c. En déduire que f est $\frac{1}{4}$-contractante.

6.d. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

6.e. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `suite(n)` renvoie la valeur de u_n.

6.f. En s'appuyant sur le résultat de la question 5.c., établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que $4^n \geq \frac{2000}{3}$.

6.g. En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

6.h. Interpréter cette valeur approchée en lien avec la fonction f.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Chaque partie étudie une expérience ainsi que des variables aléatoires différentes. Les parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.
On suppose que toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   - 3.a. Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
   - 3.b. En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).
   - 3.c. Retrouver alors le résultat de la question 2..
4. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simul(n,k)` renvoie une liste contenant une réalisation des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Partie II

Pour entier naturel k supérieur ou égal à 1, note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.
On suppose que toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

5. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2. En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   - 6.a. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$.
   - 6.b. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$. *On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.*
   - 6.c. Montrer, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = j]) = \frac{j}{n}\mathbb{P}([Z_k = j]) + \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}([Z_k = j-1])$.
   - 6.d. En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(Z_k) + 1$.
7.
   - 7.a. Montrer que la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
   - 7.b. En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$.
8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note $Y_{k,i}$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule numéro i a été tirée lors des k premiers tirages, et prenant la valeur 0 sinon. A l'aide des variables aléatoires $Y_{k,1}, Y_{k,2}, \ldots, Y_{k,n}$, retrouver l'espérance de Z_k.
9. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simulZ(n,k)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z_k.

Partie III

On note désormais T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note T_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, i boules différentes. De cette façon, $T = T_n$.
On suppose que toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

10. Donner la loi de la variable aléatoire T_1.
11. On pose $V_1 = T_1$ et pour tout $i \in [\![2; n]\!]$, $V_i = T_i - T_{i-1}$.
    Justifier que, pour tout $i \in [\![2; n]\!]$, V_i suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
12. Établir : $T = \sum_{i=1}^{n} V_i$. En déduire que T possède une espérance et démontrer que $\mathbb{E}(T) = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

13. 13.a. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

13.b. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ puis de $\mathbb{E}(T)$ lorsque $n \to +\infty$.

14. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que son exécution simule une réalisation de la variable aléatoire T.

```python
import numpy.random as rd

def simulT(n):
    L=[0 for i in range(n)]
    T=0
    while sum(L)<n:
        b=rd.randint(1,n+1)
        ......
        ......
    return T
```

Partie IV

On note maintenant U la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée. Si U prend la valeur i, avec $i \in [\![1;n]\!]$, alors on effectue une succession de i lancers de la même pièce donnant PILE avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose les lancers de pièces indépendants.
On note N la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus à l'issue de cette expérience.
On suppose que toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

15. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que son exécution simule une réalisation de la variable aléatoire N.

```python
import numpy.random as rd

def simulN(n):
    U = ......
    N=0
    for k in ......
        N=N + ......
    return N
```

16. Démontrer que $N(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
17. Donner la loi de U. Rappeler son espérance et sa variance.
18. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Démontrer que pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}_{[U=i]}([N=j]) = \begin{cases} \binom{i}{j}\frac{1}{2^i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.
19. Soit $j \in [\![0;n]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}([N=j])$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement.
20. 20.a. Calculer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{i} j\binom{i}{j}$. L'expression obtenue est-elle valable si $i = 0$?

20.b. Justifier que N possède une espérance et la calculer.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★