



2

PROBABILITÉS

COUPLES ET SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

INTRODUCTION...

Ah, les probabilités... Bien évidemment, quand on parle de probabilités, on pense aux jeux de hasard. C'est bien, initialement, en ce sens qu'elles ont été développées. Au fil des siècles, viennent ensuite de nombreux contributeurs pour consolider et développer les connaissances sur ce domaine : Galilée, Fermat, Pascal, Huygens, Moivre, Laplace, Bayes, Lagrange.

Voici une citation de Jean Dieudonné (1906-1992, mathématicien français, un des membres fondateurs du célèbre groupe Bourbaki), datée de 1977 : "Le calcul des probabilités, en tant que discipline, n'existe guère que depuis 1933, comme partie de la théorie moderne de l'Intégration ; elle a hérité de ses propres problèmes et même de son langage, des trois siècles antérieurs au cours desquels le Calcul des probabilités était un mélange de raisonnements d'allure mathématique et de considérations plus ou moins intuitives sur le rôle et l'évaluation du hasard dans les comportements humains ou les phénomènes naturels."

Que s'est-il alors passé en 1933 ? C'est en 1933 que parait en allemand le manuel *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fondements de la théorie des probabilités) rédigé par Andreï Kolmogorov (1903-1987, mathématicien russe), dans lequel il définit, entre autres, les trois axiomes de probabilités. On lui doit cette formalisation de la théorie des probabilités sur laquelle reposent désormais tous les résultats de probabilités. C'est bien cette formalisation qui a permis à la théorie des probabilités d'être légitimement reconnue comme branche des mathématiques.

POUR BIEN DÉMARRER...

1 # Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Qu'est-ce qu'une probabilité \mathbb{P} sur \mathcal{A} ?

2 # Soient A, B deux évènements, I un sous-ensemble de \mathbb{N} , ainsi que $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements.

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \dots$; $\bigcup_{i \in I} A_i = \dots$
 $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \dots$; $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \dots$

Autrement dit :

$\omega \in \bigcup_{i \in I} A_i \dots$

$\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i \dots$

- $\mathbb{P}(A \cup B) =$
- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors : $\mathbb{P}_A(B) =$
- **Définition :** A et B sont incompatibles lorsque :
- **Définition :** $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements lorsque :
- **Définition :** A et B sont indépendants (pour \mathbb{P}) lorsque :
- Formule des probabilités composées :
- Formule des probabilités totales :

3 # Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

4 # Si X est une variable aléatoire sur Ω , rappeler les définitions de $[X = a]$, $[X \leq a]$, $[X > a]$ (où $a \in \mathbb{R}$).

5 # La fonction de répartition de X , notée F_X , est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

6 # Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si X possède une espérance et un moment d'ordre 2, alors : $\mathbb{E}(X) =$ et $\mathbb{E}(X^2) =$

7 # Théorème de transfert :

8 # Formule de Koenig-Huygens :

9 # L'inventaire des lois discrètes usuelles doit être parfaitement connu !

I NOTIONS SUR LES SÉRIES DOUBLES

DÉFINITION 1 - SUITE DOUBLE

Une **suite double** est une fonction $u : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On notera $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une telle suite.

THÉORÈME 1 (HP)

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double à valeurs positives.

Si :

- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{i \geq 0} u_{i,j}$ est convergente, de somme notée s_j ($s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$),
- la série $\sum_{j \geq 0} s_j$ est convergente,

alors :

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} u_{i,j}$ est convergente, de somme notée t_i ($t_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$),
- la série $\sum_{i \geq 0} t_i$ est convergente,

et on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} t_i = \sum_{j=0}^{+\infty} s_j$$

autrement dit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$$

Petite remarque

Le théorème est également valable en échangeant i et j .
En gros : peu importe l'ordre dans lequel on étudie la nature des séries, du moment que l'on fait les deux.

Vocabulaire

Dans le cas de ce théorème, on dit que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j}$ est convergente et sa somme est le réel $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$,
égal à $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$.

EXEMPLE 1

Montrons que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente et déterminons sa somme.

Conformément à ce qui est mentionné dans le programme officiel, on admet que les théorèmes et techniques classiques concernant les séries simples s'étendent dans le cas des séries doubles.

II DÉFINITIONS ET PREMIERS RÉSULTATS

DÉFINITION 2 – COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Un **couple de variables aléatoires** (ou couple aléatoire) est une application $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.
Plus concrètement, un couple de variables aléatoires Z est la donnée de deux variables aléatoires X et Y toutes deux définies sur Ω ; on note alors $Z = (X, Y)$.
Dans le cas où X et Y sont discrètes, on dit que le couple de variables aléatoires (X, Y) est discret.

Petite remarque

On définit de la même façon un n -uplet de variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) (ou vecteur aléatoire) ainsi qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Dans toute la suite du chapitre, (X, Y) désignera un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω , (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -uplet de variables aléatoires sur Ω et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur Ω .
Nous nous intéresserons essentiellement aux couples de variables aléatoires et travaillerons sur quelques cas classiques de n -uplet ou suites de variables aléatoires.

II.1 LOI JOINTE

DÉFINITION 3 – LOI JOINTE D'UN COUPLE

La **loi jointe du couple** (X, Y) est l'application

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} : \begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0; 1] \\ (x, y) & \longmapsto & \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \end{cases}$$

♣ **MÉTHODE 1** ♣ Pour déterminer la loi jointe de (X, Y) , on donne :

- $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
- $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

EXEMPLES 2

E1 On lance deux dés tétraédriques équilibrés numérotés de 1 à 4, et on note :

- X la variable aléatoire égale au nombre obtenu par le premier dé,
- Y la variable aléatoire égale au nombre obtenu par le premier dé,
- M_1 le minimum des deux nombres obtenus,
- M_2 le maximum des deux nombres obtenus.

Donnons les lois jointes des couples (X, Y) et (M_1, M_2) , que nous résumerons dans des tableaux.

Petite remarque

Dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis et de cardinaux petits, on pourra résumer la loi jointe dans un tableau à double entrée.

Petite remarque

On pourrait bien évidemment s'intéresser aux couples (X, M_1) , (X, M_2) , (Y, M_1) et (Y, M_2) .

✗ Attention !

Certaines $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ peuvent être nulles sans que ni $\mathbb{P}([X = x])$ ni $\mathbb{P}([Y = y])$ ne soient nulles...

E2 Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ et $p \in]0; 1[$. On lance n fois une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus,
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus.

Commençons par donner les lois de X et Y puis déterminons la loi jointe du couple (X, Y) .

E3 On effectue une infinité de lancers indépendants de la même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$. On note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE et Y la variable aléatoire égale au rang du second PILE. Déterminons la loi jointe du couple (X, Y) .

Tout comme on l'avait pour la loi d'une variable aléatoire, on retrouve :

PROPRIÉTÉS 1 - SCE ASSOCIÉ À UN COUPLE

P1# La famille $([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

P2# La série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est convergente et sa somme est égale à 1.

♥ Astuce du chef ! ♥

Nous pouvons utiliser ce résultat pour déterminer la valeur d'un paramètre inconnu dans l'expression de la loi jointe d'un couple. En pratique, nous serons un peu plus malins... Voir Exemples 4 - E3.

Petite remarque

Cette série double peut être une somme finie double si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

* DÉMONSTRATION : Analogue au cas d'une variable aléatoire, P2 étant une conséquence directe de P1. *

Là encore, un résultat analogue à ce qui a été vu dans le cas d'une seule variable aléatoire, que l'on admet encore une fois :

PROPRIÉTÉ 2

Soient I et J deux ensembles finis ou dénombrables.

Si $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est une suite double positive telle que la série double $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j}$ soit convergente de somme

égale à 1, alors pour toutes suites de réels $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un couple (X, Y) de variables aléatoires sur Ω tels que :

- $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$
- $\forall (i, j) \in I \times J$, $\mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = p_{i,j}$

Petite remarque

Autant on utilisait parfois ce résultat dans le cas d'une seule VA, autant c'est très rare dans le cas d'un couple.

EXEMPLE 3

Dans l'exemple 1, on a établi que la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente de somme égale à 4. Définissons alors la suite

$(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ par : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $p_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j-2}}$. On a ainsi :

- $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $p_{i,j} \geq 0$
- la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p_{i,j}$ est convergente de somme égale à 1.

Conclusion : la suite $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définit la loi jointe d'un couple de variables aléatoires.

II.2 LOIS MARGINALES ET LOIS CONDITIONNELLES

DÉFINITIONS 4 - LOIS MARGINALES D'UN COUPLE

D1# La première loi marginale de (X, Y) est la loi de X .

D2# La seconde loi marginale de (X, Y) est la loi de Y .

♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour obtenir les lois marginales à partir de la loi jointe.

On obtient la loi de X en utilisant la formule des probabilités totales avec $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme système complet d'évènements :

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Bien évidemment...

On utilise la FPT avec le sce $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ pour obtenir la loi de Y ...

Et s'il est possible et utile de le faire : on continue avec les probabilités conditionnelles.

EXEMPLES 4

E1 Reprenons le tableau obtenu dans Exemples 2 - E1 représentant la loi jointe du couple (M_1, M_2) et complétons-le avec les lois marginales.

	M_2	1	2	3	4	
M_1						
1		$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	
2		0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	
3		0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	
4		0	0	0	$\frac{1}{16}$	

E2 Reprenons la loi jointe du couple obtenue dans Exemples 2 – E3 et déterminons la loi de Y .

⚠ Attention !
S'il y a plusieurs cas dans la loi jointe, on retrouvera ces cas dans les calculs qui suivent...

E3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = a \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

Déterminons la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .

DÉFINITIONS 5 - LOIS CONDITIONNELLES

D1# Soit $y \in Y(\Omega)$. Si $\mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$, alors la **loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$** est l'application

$$\left| \begin{array}{ll} X(\Omega) & \longrightarrow [0; 1] \\ x & \longmapsto \mathbb{P}_{[Y=y]}(\{X = x\}) \end{array} \right.$$

D2# Soit $x \in X(\Omega)$. Si $\mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$, alors la **loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$** est l'application

$$\left| \begin{array}{ll} Y(\Omega) & \longrightarrow [0; 1] \\ y & \longmapsto \mathbb{P}_{[X=x]}(\{Y = y\}) \end{array} \right.$$

♣ **Méthode !**

Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$, on donne :

- $X(\Omega)$
- $\mathbb{P}_{[Y=y]}(\{X = x\})$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

📖 **Rappel...**

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

EXEMPLE 5

On s'intéresse à une chaîne de production de baguettes magiques mise en place par des elfes de maison. On estime que 10%¹ des baguettes magiques produites sont défectueuses. On suppose que le nombre de baguettes produites en une heure est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de baguettes défectueuses produites en une heure. Déterminons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$; puis déduisons-en la loi de Y .

¹ Espérons qu'Ollivander fait mieux...

THÉORÈME 2 - LOI DE $Z = f(X, Y)$ (HP ?)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et f une fonction de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et à valeurs dans \mathbb{R} . On note $Z = f(X, Y)$.

T1# L'application Z est une variable aléatoire sur Ω .

T2#

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \{f(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ &\subset \{f(x, y) \mid (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\} \end{aligned}$$

T3#

$$\forall z \in Z(\Omega), \mathbb{P}([Z = z]) = \sum_{(x,y) \in E} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

où $E = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid z = f(x, y)\}$.

★ Subtile... ★

On perd l'égalité car dans l'écriture $\{f(x, y) \mid (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$, les choix de x et y sont indépendants et non nécessairement des valeurs associées à la même issue.

♥ Astuce du chef ! ♥

Au cas par cas, nous verrons comment nous dispenser de l'écriture un peu lourde de cette somme.

EXEMPLES 6

La somme, la différence, le produit, le minimum, le maximum de variables aléatoires sur Ω sont également des variables aléatoires sur Ω .

III INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITIONS 6 - INDÉPENDANCE DE VA

D1# Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

D2# Soient $n \in \mathbb{Z}; +\infty[$ et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes.

On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes** lorsque :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k = x_k])$$

D3# Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes.

On dit que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

Petite remarque

On peut également définir l'indépendance 2 à 2 d'une suite de VA...

Si on mentionne seulement 'indépendance', il s'agit de la mutuelle indépendance.

♣ MÉTHODE 3 ♣ Pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes : il suffit de trouver un contre-exemple.

En particulier, on peut essayer de trouver $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0$ et $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0, \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$.

EXEMPLES 7

E1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Déterminons $\mathbb{P}([X = Y])$.

E2 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Notons $q = 1 - p$ et $Z = \min(X, Y)$. On a : $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2)$. Voir **QC14**.

E3 Les variables aléatoires X et Y introduites dans Exemples 2 - E2 sont-elles indépendantes ?

♣ MÉTHODE 4 ♣ Des méthodes classiques...

1. Pour déterminer la loi de $X + Y, X - Y, |X - Y|$, on utilise la FPT (avec $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ ou $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme sce) puis :

- soit on connaît la loi jointe,
- soit on connaît une loi conditionnelle associée avec la bonne loi marginale,
- soit X et Y sont indépendantes et on connaît leur loi.

2. Pour la loi de $\min(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes et qu'on connaît leur loi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min(X, Y) \geq z) &= \mathbb{P}([X \geq z] \cap [Y \geq z]) \\ &= \mathbb{P}([X \geq z]) \times \mathbb{P}([Y \geq z]) \quad \left. \begin{array}{l} \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ \text{on connaît les lois de } X \text{ et } Y \end{array} \right\} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Puis, si demandé, on retrouve $\mathbb{P}(\min(X, Y) = z)$...

3. Pour la loi de $\max(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes et qu'on connaît leur loi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max(X, Y) \leq z) &= \mathbb{P}([X \leq z] \cap [Y \leq z]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq z]) \times \mathbb{P}([Y \leq z]) \quad \left. \begin{array}{l} \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ \text{on connaît les lois de } X \text{ et } Y \end{array} \right\} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Puis, si demandé, on retrouve $\mathbb{P}(\max(X, Y) = z)$...

✗ Attention !

Pour $\mathbb{P}(X + Y = z)$, on obtiendra la somme des $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x])$: cette probabilité est nulle dès que $z - x \notin Y(\Omega)$...

→ Réflexe !

Pour tous réels x, y, z :

$$\begin{aligned} \min(x, y) \geq z &\iff \begin{cases} x \geq z \\ y \geq z \end{cases} \\ \max(x, y) \leq z &\iff \begin{cases} x \leq z \\ y \leq z \end{cases} \end{aligned}$$

Petite remarque

Méthode identique pour $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ si X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes.

THÉORÈME 3 - STABILITÉ DES LOIS BINOMIALES ET LOIS DE POISSON

T1# Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \implies X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$$

T2# Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \implies X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

* DÉMONSTRATION :

T1# A faire en exercice, en utilisant la formule de Vandermonde ci-dessous... Pour tous $k, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq m + n$, on a :

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

T2# Voir **QC13**.

*

Et si c'est vrai pour deux, c'est vrai pour n ... A condition de pouvoir conserver l'indépendance, et ça, c'est l'affaire du lemme suivant :

LEMME 1 - DES COALITIONS

1. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de X est indépendante de toute variable aléatoire fonction de Y .
2. Soient $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$ et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes.
Si les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes, alors pour tout $p \in \llbracket 2; n - 1 \llbracket$, toute variable aléatoire fonction des X_1, \dots, X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction des X_{p+1}, \dots, X_n .

Important !

Le lemme des coalitions permet de généraliser les stabilités des lois binomiales et lois de Poisson à la somme de n VA. La démonstration est immédiate par récurrence.

Un cas particulier :

THÉORÈME 4 - SOMME DE VA INDÉPENDANTES DE MÊME LOI DE BERNOULLI

Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n X_k \leftrightarrow \mathcal{B}(n; p)$$

* DÉMONSTRATION :

*

IV ESPÉRANCE DE $f(X, Y)$

Pour commencer, on retrouve le fameux :

THÉORÈME 5 - DE TRANSFERT

Soit f une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

La variable aléatoire $f(X, Y)$ admet une espérance si, et seulement si, la série double

$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y) \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbb{E}(f(X, Y))$ est la somme de cette série.

Important !

Cas particulier : sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

EXEMPLE 8

Considérons deux variables aléatoires X et Y telles que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} ; \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{j+k}{e^{2j+k} j! k!}$$

Justifions que la variable aléatoire Z^{X+Y} admet une espérance et déterminons-la.

Pourquoi ?

Pourquoi peut-on dire que les deux lois marginales sont les mêmes ?

PROPRIÉTÉ 3 - LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$. Si les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n admettent toutes une espérance, alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la variable aléatoire $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{E}(X_k)$$

* DÉMONSTRATION : Si on devait la démontrer, on le ferait en trois temps :

- on sait déjà (cours de 1A) que si X admet une espérance, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$;
- ensuite, on démontrerait le résultat dans le cas d'une somme de deux variables aléatoires en utilisant le théorème de transfert et le théorème 1 ;
- puis on obtiendrait le résultat voulu par récurrence.

*

PROPRIÉTÉS 4 - CROISSANCE DE L'ESPÉRANCE

P1#

$$\left. \begin{array}{l} X \geq 0 \text{ (ou } \mathbb{P}(X \geq 0) = 1) \\ X \text{ admet une espérance} \end{array} \right\} \implies \mathbb{E}(X) \geq 0$$

P2#

$$\left. \begin{array}{l} X \leq Y \text{ (ou } \mathbb{P}(X \leq Y) = 1) \\ X \text{ et } Y \text{ admettent une espérance} \end{array} \right\} \implies \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

* DÉMONSTRATION :

P1# Supposons que $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ et que X admet une espérance.

Puisque X admet une espérance, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) && \swarrow \mathbb{P}(X \geq 0) = 1, \text{ donc si } x < 0, \text{ alors } \mathbb{P}(X = x) = 0 \\ &= \sum_{x \in X(\Omega) / x \geq 0} x\mathbb{P}(X = x) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

P2# On applique le point précédent à la variable aléatoire $Z = Y - X$, avec la linéarité de l'espérance...

*

PROPRIÉTÉS 5 - ESPÉRANCE D'UN PRODUIT DE VA INDÉPENDANTES

P1# Si X et Y sont indépendantes et admettent une espérance, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

P2# Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\prod_{k=1}^n X_k$ admet une espérance et $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$.

Utile...

La contraposée peut servir pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes !

X Attention !

La réciproque est fautive !

* DÉMONSTRATION : Là encore, le théorème de transfert et le théorème 1 permettent de démontrer P1, puis on en déduit P2 par récurrence, en utilisant le lemme des coalitions.

*

EXEMPLES 9

E1 Reprenons le contexte de Exemples 1 - E1. Justifions que la variable aléatoire XY possède une espérance et calculons-la. Déduisons-en l'espérance de la variable aléatoire M_1M_2 . Les variables aléatoires M_1 et M_2 sont-elles indépendantes ?

E2 Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. On pose $Y = X_1X_2$ et $Z = X_2X_3$. Montrons que Y et Z ne sont pas indépendantes.

À retenir...

Si $X \mapsto \mathcal{B}(p)$, alors

E3 On tire au hasard un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ et $(0; -1)$. On note X la variable aléatoire égale à l'abscisse du point et Y son ordonnée.

- Donnons la loi de X et celle de Y puis leur espérance.

- Que dire de la variable aléatoire XY ?

- Montrons que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Qu'avons-nous ainsi mis en évidence ?

V COVARIANCE D'UN COUPLE

DÉFINITION 7 - COVARIANCE

La covariance du couple (X, Y) est le réel, noté $\text{Cov}(X, Y)$, défini par (si existence) :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

Petite remarque

$\text{Cov}(X, X) =$

LEMME 2 (HP)

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance.

✗ Attention !

Si X et Y sont indépendantes, l'existence de leur espérance suffit à l'existence de l'espérance de XY . Si elles ne sont pas indépendantes, il est possible que XY n'ait pas d'espérance même si X et Y en ont une. On peut aisément trouver un exemple dans le cas où $X = Y$...

* DÉMONSTRATION :

- Résultat préliminaire. Montrons :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

- Ensuite, d'après le théorème de transfert :

XY admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est absolument convergente

- ◊ Or, d'après le résultat préliminaire :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

- ◊ Démontrons que les séries doubles $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ et $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ sont convergentes.

↪ Soit $x \in X(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est convergente et :

$$\mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

D'où :

$$\forall x \in X(\Omega), \sum_{y \in Y(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = x^2 \mathbb{P}([X = x])$$

Or X admet un moment d'ordre 2, donc la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x])$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème 1, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est convergente.

↪ De la même façon, on démontre la convergence de la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

Par critère de comparaison sur les séries doubles à terme général positif, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |xy| \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$

est convergente.

Conclusion : XY admet une espérance.

*

THÉORÈME 6 – CONDITION SUFFISANTE D'EXISTENCE DE LA COVARIANCE

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $\text{Cov}(X, Y)$ existe.

* DÉMONSTRATION : Supposons que X et Y admettent un moment d'ordre 2. On a déjà :

$$(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) = XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Or :

- X et Y admettent un moment d'ordre 2, donc d'après le lemme précédent, XY admet une espérance ;
- X et Y admettent un moment d'ordre 2, donc elles admettent une espérance ;
- la variable aléatoire $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ est constante, donc elle admet une espérance.

Par conséquent, $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance.

Conclusion : $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ admet une espérance, autrement dit, $\text{Cov}(X, Y)$ existe.

*

En pratique, on utilisera assez peu la définition 7, mais plutôt la formule qui suit :

PROPRIÉTÉ 6 – FORMULE DE KOENIG-HUYGENS

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Petite remarque

Dans le cas $X = Y$, on retrouve la formule du KH sur la variance.

* DÉMONSTRATION : Supposons que X et Y admettent un moment d'ordre 2. Dans ce cas $\text{Cov}(X, Y)$ existe et :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right) \\ &= \mathbb{E}(XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de l'espérance, licite car } XY, X \text{ et } Y \\ \text{admettent une espérance (hypothèse + lemme 2)} \end{array} \right\} \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

*

PROPRIÉTÉS 7

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1# $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$

P2# $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ *(symétrie)*

P3# $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$ *(linéarité à gauche)*

P4# $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2)$ *(linéarité à droite)*

P5# $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = 0$

P6# Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

⚠ Attention !

La réciproque de P6 est fautive...
 Mais la contraposée peut servir pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes !

* DÉMONSTRATION :

*

PROPRIÉTÉS 8 - VARIANCE D'UNE SOMME

P1# Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

P2# Si X et Y admettent une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une variance et : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

P3# Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n X_k \text{ admet une variance et : } \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k).$$

Rappel...

Si X admet une variance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

Pour info...

Il existe une formule donnant la variance d'une somme de n VA non nécessairement indépendantes...

* DÉMONSTRATION :

*

PROPRIÉTÉ 9 - INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ (HP)

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

* DÉMONSTRATION : QC28

*

Pour terminer, le coefficient de corrélation linéaire et son interprétation :

DÉFINITION 8 - COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une variance non nulle.

Le **coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y)** est le réel, noté $\rho(X, Y)$, défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent les écarts-types respectifs de X et Y .

Rappel...

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Petite remarque

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$$

PROPRIÉTÉS 10 - INTERPRÉTATION DU COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

Soient X et Y deux variables aléatoires admettent une variance non nulle.

P1# $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

P2# $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement croissante de l'autre ;

P3# $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre ;

Vocabulaire

Si $\rho(X, Y) = 0$ (càd si $\text{Cov}(X, Y) = 0$), on dit que **X et Y sont non corrélés**.
ATTENTION : indépendantes \implies non corrélés. La réciproque est fautive !

* DÉMONSTRATION : P1 découle immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz... Le reste fait l'objet de QC29.

*

EXEMPLE 10

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. On pose $Y = X^2$.

Montrons que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes et qu'elles sont pourtant non corrélées.