5

Analyse

Intégrales impropres

Introduction...

L'objectif de ce chapitre est l'étude des intégrales impropres : autrement dit, des intégrales pour lesquelles l'intervalle d'intégration n'est pas un segment.
Cette étude se détaille en deux parties :

- l'aspect calculatoire qui consistera à utiliser les techniques habituelles de calcul d'intégrales ;
- l'aspect théorique dont l'analogie avec les séries sera frappante !

Tout comme l'étude des séries était essentielle à l'étude des variables aléatoires discrètes, celle des intégrales impropres l'est pour ce qui sera étudié au prochain chapitre : les variables aléatoires à densité.

Pour bien démarrer...

1 # Compléter :

Fonction	Une primitive
$x \longmapsto 0$	
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$	
$x \longmapsto x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$x \longmapsto e^{\alpha x} \ (\alpha \neq 0)$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	
$u'e^u$	
$\dfrac{u'}{u}$	
$u'u^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	

2 # Rappeler le théorème fondamental de l'analyse.

3 # Quelles sont les méthodes de calculs de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$?

4 # Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$; $u, v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et f une fonction continue sur J. Ensemble de définition, dérivabilité et dérivée de $g : x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.

I Définitions et propriétés

Définition 1 – Intégrale impropre

Une intégrale est **impropre** lorsque l'intervalle d'intégration (sur lequel l'intégrande est définie et continue) n'est pas un segment.

Voici les différents types d'intégrales impropres :

$\int_{[a;+\infty[} f(t)dt$ intégrale impropre en $+\infty$	$\int_{]-\infty;b]} f(t)dt$ intégrale impropre en $-\infty$	$\int_{]a;b]} f(t)dt$ intégrale impropre en a	$\int_{[a;b[} f(t)dt$ intégrale impropre en b
$\int_{]-\infty;+\infty[} f(t)dt$ intégrale impropre en $+\infty$ et en $-\infty$	$\int_{]-\infty;b[} f(t)dt$ intégrale impropre en $-\infty$ et en b	$\int_{]a;+\infty[} f(t)dt$ intégrale impropre en a et en $+\infty$	$\int_{]a;b[} f(t)dt$ intégrale impropre en a et en b

✘ Attention !

En pratique, on ne notera pas $\int_{[a;b[} f(t)dt$, mais $\int_a^b f(t)dt$: la notation est la même que pour une intégrale sur un segment ! Il faudra donc déjà commencer par savoir si c'est une intégrale sur un segment ou une intégrale impropre...

♣ Méthode 1 ♣ Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. On commencera toujours l'étude de $\int_a^b f(t)dt$ par la continuité de l'intégrande, puis :

- si f est continue sur le segment $[a; b]$, alors l'intégrale n'est pas impropre (cours de 1A),
- si f est continue sur $]a; b]$ (pas en a), alors l'intégrale est impropre en a et pas en b,
- si f est continue sur $[a; b[$ (pas en b), alors l'intégrale est impropre en b et pas en a,
- si f est continue sur $]a; b[$ (ni en a ni en b), alors l'intégrale est impropre en a et en b.

Important !

Une intégrale dont au moins une des bornes est $\pm\infty$ est toujours impropre !

Petite remarque

Souvent, la fonction ne sera même pas définie en la borne en laquelle l'intégrale est impropre...

Exemples 1

E1 La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est définie et continue sur $]0; 1]$ (pas en 0), donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ est impropre en 0 seulement.

E2 La fonction $t \longmapsto e^{-t}$ est définie et continue sur $[0; +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$), donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.

E3 La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ est définie et continue sur $]0; 1[$ (ni en 0 ni en 1), donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t\ln(t)}$ est impropre en 0 et en 1.

E4 La fonction $t \longmapsto t\ln(t)$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$ (pas en 0), donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\ln(t)dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

Dans la suite du cours on énoncera certaines propriétés sur les intégrales du type $\int_{[a;+\infty[} f(t)dt$, mais tout ce qui sera vu sera à adapter et/ou également valable pour les autres types d'intégrales impropres.

I.1 Convergence & divergence.

Définitions 2 – Convergence / divergence d'une intégrale impropre

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a; +\infty[$.

D1# L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **est convergente** lorsque la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

D2# Dans les autres cas (pas de limite ou limite infinie), l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **est divergente**.

✎ Notation

En cas de convergence, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$$

Pour les séries, on note $\sum_{n\geq} u_n$ la série ; et si convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa somme (la limite de la suite des sommes partielles). Pour les intégrales impropres, on utilise malheureusement la même notation pour l'intégrale impropre (CV ou DV) et son éventuelle valeur (si CV).

♣ Méthode 2 ♣ Pour étudier la nature (convergence ou divergence) d'une intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et, le cas échéant (si besoin), calculer sa valeur, on peut :

- calculer, pour tout $x \in [a; +\infty[$, $\int_a^x f(t)dt$,
- puis étudier la limite de l'expression obtenue quand $x \to +\infty$.

Important !

Les calculs se font sur $\int_a^x f$ et f est continue sur le segment $[a; x]$: on se place donc dans le cadre de ce qui a été vu en 1A. Par conséquent, méthodes habituelles de calculs d'intégrale :
- à vue,
- IPP
- changement de variable

Remarque

> La définition est à adapter dans le cas des autres types d'intégrales impropres... Parfois ce sera la borne du bas qui tendra vers $-\infty$, ou bien vers un nombre réel.

Exemples 2

E1 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est définie et continue sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $x \in [1;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt &= \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x \\ &= \frac{-1}{x} + 1\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} + 1 = 1$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente et vaut 1.

Rédaction
On compare cette rédaction avec celle sur les séries... Ce sont les mêmes !

E2 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$.

Petite remarque
Si la lettre x est déjà utilisée (comme variable d'intégration par exemple), alors on aime utilise A comme lettre pour faire varier la borne du bas ou B pour la borne du haut.

E3 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

PROPRIÉTÉ 1 – RELATION DE CHASLES

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a; +\infty[$.
Pour tout $c \in [a; +\infty[$, les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature ; et en cas de convergence :
$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{c} f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt.$

En gros...
Seule nous importe la borne d'impropreté.

DÉMONSTRATION : Immédiat, en utilisant la relation de Chasles sur les intégrales (non impropres)... On montre que si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ également ; puis que si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente, alors $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ l'est aussi.

I.2 INTÉGRALES FAUSSEMENT IMPROPRES

PROPRIÉTÉ 2 – INTÉGRALE FAUSSEMENT IMPROPRE

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $]a; b]$.
Si f est prolongeable par continuité en a, alors l'intégrale $\int_a^{b} f(t)dt$ est convergente et :

$$\int_a^{b} f(t)dt = \int_a^{b} \tilde{f}(t)dt$$

où $\tilde{f}$ désigne le prolongement de f sur $[a; b]$.

☞ Rappel...
f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si, $\lim_a f$ est finie.

Vocabulaire
Dans ce cas, on dit que l'intégrale est **faussement impropre** en a.

DÉMONSTRATION : Supposons que la fonction f est prolongeable par continuité en a. Notons alors $\tilde{f}$ le prolongement de f sur $[a; b]$, défini par :

$$\tilde{f}(a) = \lim_{t \to a} f(t) \quad ; \quad \forall t \in]a; b], \ \tilde{f}(t) = f(t)$$

Soit $x \in]a; b]$. On a alors :

$$\int_x^{b} f(t)dt = \int_x^{b} \tilde{f}(t)dt$$

Or f est continue sur $]a; b]$, donc la fonction $\tilde{f}$ également ; et ainsi, la fonction $\tilde{f}$ est continue sur le segment $[a; b]$. Elle admet donc des primitives $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$; notons $\tilde{F}$ l'une d'elles.
On a ainsi :

$$\int_x^{b} \tilde{f}(t)dt = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(x)$$

Et donc :

$$\int_x^{b} f(t)dt = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(x)$$

Or, $\tilde{F}$ est continue en a, donc $\lim_{x \to a} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(a)$. D'où :

$$\lim_{x \to a} \int_x^{b} f(t)dt = \int_a^{b} \tilde{f}(t)dt$$

Conclusion : l'intégrale $\int_a^{b} f(t)dt$ est convergente et vaut $\int_a^{b} \tilde{f}(t)dt$.

EXEMPLE 3

Étudions la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$.

La fonction $t \longmapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est définie et continue sur $]0; 1]$ comme quotient de deux fonctions usuelles continues sur $]0; 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; 1]$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ *semble* être impropre en 0 seulement.

Or $e^t - 1 \underset{t \to 0}{\sim} 1$, donc :

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

Par conséquent, la fonction $t \longmapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

Conclusion : l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ est faussement impropre en 0 ; elle est donc convergente.

➟ Réflexe !
Dans le cas d'une intégrale impropre en un réel a, on détermine rapidement $\lim_a f$ pour savoir si l'intégrale est faussement impropre ou non.

I.3 Intégrales impropres en les deux bornes

Définition 3 - Cas d'une intégrale impropre en deux bornes

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie et continue sur $]a;b[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **est convergente** lorsqu'il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ sont toutes deux convergentes ; et en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Petite remarque
S'il existe un tel réel c, alors (d'après la relation de Chasles) tous les réels de $]a;b[$ conviennent... et donc l'endroit du découpage n'importe pas !

Important !
Par conséquent, si l'une des deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ est divergente, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est également divergente.

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour étudier la nature d'une intégrale impropre en les deux bornes :** on découpe toujours en l'étude de deux intégrales impropres en une seule borne.

Exemples 4

E1 Étudions la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

E2 Étudions la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$.

✘ Attention !
Sur un segment, l'intégrale d'une fonction impaire est nulle. Dans le cas des intégrales impropres, la seule hypothèse d'imparité ne suffit pas.

Propriétés 3 - Étude des intégrales impropres à intégrande paire ou impaire (HP ?)

Soient $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et f une fonction définie et continue sur $]-a;a[$.

P1# Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_{0}^{a} f$ est convergente ; et, en cas de convergence : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.

P2# Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_{0}^{a} f$ est convergente ; et, en cas de convergence : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.

⋆ Démonstration :

⋆

Exemples 5

E1 Déterminons la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt$.

E2 Déterminons la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}dt$.

II Propriétés sur les intégrales impropres

Les propriétés suivantes vues pour les intégrales sur un segment sont encore valables (et nous ne les démontrons donc pas).

Propriétés 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;+\infty[$.

P1# Linéarité.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^{+\infty} f \text{ est convergente} \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{pour tous } \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{+\infty}(\lambda f+\mu g) \text{ est convergente et :} \\ \displaystyle\int_a^{+\infty}(\lambda f+\mu g) = \lambda\int_a^{+\infty} f + \mu\int_a^{+\infty} g\end{array}\right)$$

P2# Positivité.

$$\left.\begin{array}{l}\forall t \in [a;+\infty[,\ f(t) \geq 0 \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \geq 0$$

P3# Croissance.

$$\left.\begin{array}{l}\forall t \in [a;+\infty[,\ f(t) \geq g(t) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f \text{ et } \int_a^{+\infty} g \text{ sont convergentes}\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \geq \int_a^{+\infty} g$$

P4# Inégalité triangulaire sur les intégrales.

$$\left(\int_a^{+\infty} |f| \text{ est convergente}\right) \Longrightarrow \left(\int_a^{+\infty} f \text{ est convergente et : } \left|\int_a^{+\infty} f\right| \leq \int_a^{+\infty} |f|\right)$$

Petite remarque

Pour alléger le visuel, j'écrirai parfois $\displaystyle\int f$ et non $\displaystyle\int f(t)dt$.

✘ Attention !

Pour les séries : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ n'est valable que si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes ; c'est pareil pour les intégrales !

✘ Attention !

On veille à l'ordre des bornes pour appliquer la positivité, la croissance et l'inégalité triangulaire.

Vocabulaire

$\displaystyle\int_I f$ est **absolument convergente** lorsque $\displaystyle\int_I |f|$ est convergente.
Et ainsi, P4 fournit en particulier que CVA $\Longrightarrow$ CV, la réciproque étant fausse (comme pour les séries).

III Intégrales impropres usuelles.

Théorème 1 - Intégrales usuelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

T1# les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ divergent *(intégrale de Riemann)*

T2# l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ *(intégrale de Riemann)*

T3# l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$ *(intégrale de Riemann)*

T4# l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$

T5# l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente et vaut -1

Hors programme ?
Il faut savoir rapidement établir que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ CV et vaut -1 (Exemples 2 - E2)

⋆ Démonstration :

IV Critères sur les intégrales à intégrande positive

Les critères ci-dessous sont énoncés dans le cas d'intégrales du type $\displaystyle\int_{[a;+\infty[}$. Ils sont valables de la même façon pour les intégrales du type $\displaystyle\int_{]-\infty;b[}$, $\displaystyle\int_{[a;b[}$ et $\displaystyle\int_{]a;b]}$.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

T1# Si f est définie, continue et positive sur $[a;+\infty[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée.

T2# Si f est définie, continue et positive sur $]-\infty;b]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ est majorée.

Petite remarque
Résultats encore valables sur des intégrales impropres du type $\displaystyle\int_{[a;b[} f$ et $\displaystyle\int_{]a;b]} f$.

Démonstration : Immédiat d'après le théorème de limite monotone sur les fonctions...

Théorème 3 - Critère de comparaison sur les intégrales à intégrande positive

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;+\infty[$.

T1# $\left.\begin{array}{l}\forall t \in [a;+\infty[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente}\right)$

T2# $\left.\begin{array}{l}\forall t \in [a;+\infty[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est divergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est divergente}\right)$

Démonstration : Démonstration analogue à celle du critère sur les séries (QC4), en utilisant le théorème 2.

On en déduit le suivant :

Théorème 4 - Critère de négligeabilité sur les intégrales à intégrande positive

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a; +\infty[$.

T1# $\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente}\right)$

T2# $\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est divergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est divergente}\right)$

★ Classique ! ★

On utilise souvent le premier point dans le cas où $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ est une intégrale usuelle convergente (fréquemment intégrale de Riemann).
Autrement dit, si f est positive et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, alors on pourra conclure sur la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$.

♡ Astuce du chef ! ♡

Le second point ne sert pas souvent..

Démonstration : Démonstration analogue à celle du critère sur les séries.

Qui entraîne le dernier :

Théorème 5 - Critère d'équivalence sur les intégrales à intégrande positive

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a; +\infty[$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ ont même nature}\right)$$

♡ Astuce du chef ! ♡

En fait, puisque $f \underset{+\infty}{\sim} g$, il suffit que g soit positive sur $[a; +\infty[$ pour que f le soit au voisinage de $+\infty$... et on peut donc appliquer le critère.

Démonstration : Démonstration analogue à celle du critère sur les séries.

Exemples 6

E1 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t}dt$.

E2 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^2+t}dt$.

E3 Étudions la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

♣ **Méthode 4** ♣ **Pour étudier $\int_I f$:**

1. **Si l'on sait primitiver f :** on met en place la méthode 2 (calcul de l'intégrale sur un segment, puis passage à la limite).
2. **Si l'on ne sait pas primitiver f :**
   - **méthode pouvant aboutir à la valeur si convergence :**
     - ◇ on procède par **IPP sur un segment**, puis passage à la limite ;
     - ◇ on met en place un changement de variable :
       - ⇝ changement de variable affine possible sur les intégrales impropres,
       - ⇝ changement de variable non affine : souvent donné dans l'énoncé et travail obligatoire sur un segment puis passage à la limite.
   - **méthode ne pouvant pas aboutir à la valeur si convergence :**
     - ◇ si f est positive : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec l'intégrande d'une intégrale usuelle par exemple),
     - ◇ si f est négative : on utilise le fait que $-\int f = \int -f$ et que les intégrales $-\int f$ et $\int f$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent,
     - ◇ si f change de signe : on peut étudier la convergence absolue : si $\int_I |f|$ CV, alors $\int_I f$ CV. Si $\int_I |f|$ DV, alors on ne peut pas conclure.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes...

✘ Attention !

Si l'intégrale est impropre en les 2 bornes, on découpe arbitrairement l'intervalle d'intégration pour étudier la nature de 2 intégrales impropres en 1 borne.

★Subtile...★

L'étude de la nature d'une intégrale est une notion *locale* (c'est l'étude de l'existence d'une limite). Quand on veut appliquer un critère pour étudier la nature de $\int_a^{+\infty} f$, nul besoin que f soit continue sur tout $[a;+\infty[$: si f est positive après c, on met en place un critère sur $\int_c^{+\infty} f$ et on dit que $\int_a^c f$ est une intégrale sur un segment, donc convergente.