Exercices du chapitre 5
Tout sur les intégrales

Exercice 1
Étudier la convergence des intégrales suivantes et, le cas échéant, déterminer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}dx$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2x}dx$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1}dx$
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$
12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
14. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}dx$
15. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$
16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dt$
17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}dx$
18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx$
19. $\displaystyle\int_0^{1} x^k\ln(x)dx$, pour $k\in\mathbb{N}$

Exercice 2
Étudier la nature de chaque intégrale ci-dessous.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}dt$ pour $k\in\mathbb{N}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\ln(t)}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+t+1}dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+t}dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+\sqrt{t}}dt$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{t^4}\right)dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}$
8. $\displaystyle\int_0^{1} t\ln(t)dt$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}dt$

Exercice 3 - Fonction Gamma

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ est convergente.

Pour $x\in\mathscr{D}$, on pose alors $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$.

2. Soit $x\in\mathscr{D}$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.

Exercice 4 - Fonction définie par une intégrale
Considérons $F : x\longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

1. Justifier que F est définie sur $]0;+\infty[$.
2. Étudier le signe de $F(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$.
3. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et déterminer sa dérivée.
4. Déterminer les limites de F en 0 et en $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variations complet de F sur $]0;+\infty[$.

Exercice 5 - Fonction définie par une intégrale
On définit la fonction f sur $[0;1]$ par : $f(0)=0$, $f(1)=\ln(2)$ et pour tout $x\in]0;1[$, $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[0;1]$.
2. 2.a. Soit $x\in]0;1[$. Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln(t)}$.
   2.b. En déduire que pour tout $x\in]0;1[$: $x^2\ln(2)\leq f(x)\leq x\ln(2)$.
   2.c. En déduire que f est continue sur $[0;1]$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[$ puis déterminer ses variations.

●●○○ Exercice 6 - EDHEC 2004 E

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. 3.a. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   3.b. Établir : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\ln(2)$.
   3.c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. 4.a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, écrire $\ln(2)-u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   4.b. En déduire : $\forall n\in\mathbb{N},\ \ln(2)-u_n\leq\dfrac{1}{n+1}$.
   4.c. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

5. 5.a. Justifier, pour tout $n\in[\![2;+\infty[\![$, la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   5.b. Montrer : $\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ 0\leq v_n\leq\dfrac{1}{n-1}$.
   5.c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

●●○○ Exercice 7 - EDHEC 2003 E

On note f la fonction définie, pour tout réel strictement positif x, par : $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. 1.a. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_n^{+\infty}f(x)dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   1.b. En déduire : $I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.
2. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=f(n)$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq1}u_n$ est convergente.
3. 3.a. Établir : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f(k+1)\leq\displaystyle\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k)$.
   3.b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\leq I_n\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.
   3.c. Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

●●○○ Exercice 8 - EDHEC 2019 E

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1(1-t^2)^n dt$. On a donc, en particulier : $u_0=1$.

1. Déterminer u_1 et u_2.
2. 2.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   2.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   3.a. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt$. On admet ensuite qu'elle vaut 1.
   3.b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-nt^2}dt$, puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-nt^2}dt$.
   3.c. Montrer que, pour tout réel t, on a : $e^{-t^2}\geq1-t^2$.
   3.d. En déduire : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1(1-t)^n dt$ puis montrer : $u_n\geq\dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire concernant la série de terme général u_n ?
5. 5.a. Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}(2n+2)(u_n-u_{n+1})$.
   5.b. En déduire l'égalité :
   $$\forall n\in\mathbb{N},:\ u_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$
   5.c. On admet l'équivalent $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer :
   $$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$
6. En utilisant le résultat de la question 5.a. écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de u_n.