

●○○○ EXERCICE 1 - CALCULS DE LIMITES (RAPPELS)

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$ et $\lim_{x < 2} \frac{1}{(x-2)^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3}$ et $\lim_{x < 3} \frac{x}{x-3}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 - 3x + 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{-x} + 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{e^{-x}-1}$ et $\lim_{x < 0} \frac{x-3}{e^{-x}-1}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + x}{e^{-x}}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^3}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}+1}$

11. $\lim_{x \rightarrow -2} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(x+2))$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$ et $\lim_{x < 0} e^{-1/x^2}$

●○○○ EXERCICE 2 - CALCULS DE LIMITES (RAPPELS)

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 7}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x^2 + 5}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - \ln(x+2))$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - e^x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - e^x}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$ et $\lim_{x > 2} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(x+2))$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(e^x + 2))$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{1/x}$ et $\lim_{x < 0} \frac{1}{x} e^{1/x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x}$ et $\lim_{x < 0} x^2 e^{1/x}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) - x$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$

●○○○ EXERCICE 3

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points indiqués.

1. $x \mapsto \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + x}$ en $+\infty$ et en 0.

2. $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$.

3. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$ et 0.

4. $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ en 0 et $+\infty$.

●○○○ EXERCICE 4 - PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{\ln(1 + x^2)}$. Est-elle prolongeable par continuité sur \mathbb{R} ?

2. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{x-1}$ est vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur \mathbb{R}_*^+ .

3. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[-1; +\infty[$.

4. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur \mathbb{R}^+ ?

●○○○ EXERCICE 5

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 1[$ par $f(0) = 1$ et $\forall x \in] -\infty; 1[\setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.

Démontrer que f est continue sur $] -\infty; 1[$.

••• EXERCICE 6 - AVEC DES ÉQUIVALENTS

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\ln(x)}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(1 + e^{-x})\right)^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}}$

••• EXERCICE 7 - FONCTION ζ DE RIEMANN

On considère la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ .

2. Montrer que pour tout $s \in]1; +\infty[$, $\zeta(s) \geq 1$.

3. Étudier les variations de la fonction ζ sur $]1; +\infty[$.

4. 4.a. Démontrer : $\forall s \in]1; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$.

4.b. Établir alors : $\forall s \in]1; +\infty[$, $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$.

4.c. En déduire : $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{s-1}$.

5. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.

Dans le chapitre sur les développements limités, nous verrons comment il est parfois possible de procéder quand nous sommes coincés avec des sommes / différences et que les équivalents ne nous permettent alors pas de conclure (interdiction de sommer des équivalents).