4

Analyse

Comparaison de fonctions

Introduction...

Pour bien démarrer...

1 # Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une fonction ?

2 # Définition quantifiée de fonction f possédant une limite finie en $+\infty$.

3 # Définition quantifiée de fonction f possédant une limite infinie en $+\infty$.

4 # Définition quantifiée de fonction f possédant une limite finie en un réel a.

5 # Définition quantifiée de fonction f possédant une limite infinie en un réel a.

Définitions 1 - Voisinages

D1# Soit $a \in \mathbb{R}$. Un **voisinage (fermé) de a** est un segment contenant a non réduit à $\{a\}$.

D2# Un **voisinage (fermé) de $+\infty$** (resp. $-\infty$) est un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A]$), avec $A \in \mathbb{R}$.

I Négligeabilité de fonctions

Définition 2 - Négligeabilité de fonctions

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler a).
On dit que **f est négligeable devant g en a** (ou au voisinage de a) lorsque :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

> **Notation**
> $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

> **Petite remarque**
> On peut aussi dire que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ lorsque x tend vers a.

> **Pour info...**
> En fait, on peut donner une définition plus générale (sans la condition sur g) :
> f est négligeable devant g lorsqu'il existe un voisinage V_a de a et une fonction ε tels que : $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\forall x \in [...]$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Exemples 1

E1 $x \longmapsto x^2$ est négligeable devant $x \longmapsto x^3$ en $+\infty$; mais $x \longmapsto x^3$ est négligeable devant $x \longmapsto x^2$ en 0.

E2 $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est négligeable devant $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ en 0 (par valeurs supérieures).

E3 $x \longmapsto (x-1)^2$ est négligeable devant $x \longmapsto x-1$ en 1.

Notations - de Landau

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler a).

N1# On note $\underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g en a.

N2# Par abus, on écrira $f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$ au lieu de $f \in \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$.
On lira "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$ lorsque x tend vers a".

> **Petite remarque**
> Dans l'écriture "$f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$", le x est muet.

> **En gros...**
> "Être négligeable devant" signifie "être très petit devant", comme en français !

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$:
   Dans ce cas, $f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$ si, et seulement si ....
2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$:
   Dans ce cas, $f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$ si, et seulement si ....
3. $f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(1\big)$ si, et seulement si ....

Propriétés 1

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2, h$ sept fonctions définies au voisinage de a telles que g, g_1, g_2, h ne s'annulent pas au voisinage de a (elles peuvent s'annuler en a).

P1# $\left.\begin{array}{l} f_1(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big) \\ f_2(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$ *(linéarité)*

P2# $\left.\begin{array}{l} f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big) \\ g(x) = \underset{x \to a}{o}\big(h(x)\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(h(x)\big)$ *(transitivité)*

P3# $f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big) \Longrightarrow f(x)h(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)h(x)\big)$

P4# $\left.\begin{array}{l} f_1(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g_1(x)\big) \\ f_2(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g_2(x)\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_1(x)f_2(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$

P5# $f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big) \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(\lambda g(x)\big)$

★ Démonstration : On adapte celles du chapitre 1... ★

Exemples 2

E1 On a : $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$, $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$ et $1 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$. D'où : $x^2+2x+1 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$.

E2 $x^4+x^2+2x+1+\underset{x\to+\infty}{o}(x^3) = x^4 + \underset{x\to+\infty}{o}(x^3)$.

En effet, puisque x^2+2x+1 est négligeable devant x^3 en $+\infty$, l'expression $x^4+x^2+2x+1+\underset{x\to+\infty}{o}(x^3)$ est en fait égale à x^4 + la somme de deux quantités négligeables devant x^3 en $+\infty$. Par conséquent, on a l'égalité énoncée...

E3 Par croissance comparée, on a : $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or, a $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'où, par transitivité : $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

E4 On sait que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$, donc : $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

E5 On sait que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$ et $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc : $\ln(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

E6 On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_*^+,\ \left(a<b \Longrightarrow x^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b)\right)$$

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_*^+,\ \ln(x)^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b)$$

$$\forall b,c\in\mathbb{R}_*^+,\ x^b \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{cx})$$

On les retient parfois ainsi :

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}_*^+,\ \ln(x)^a \ll x^b \ll e^{cx}$$

Ainsi que :

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_*^+,\ \left(a<b \Longrightarrow x^b \underset{x\to0}{=} o(x^a)\right)$$

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_*^+,\ \ln(x)^a \underset{\substack{x\to0\\>}}{=} o\left(\frac{1}{x^b}\right)$$

Vocabulaire
Le symbole "$\ll$" se lisant alors "est négligeable devant".

Parfois, on écrira $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big)$ qui se lit "$f(x)$ égale $g(x)$ + un petit o de $h(x)$". Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une fonction φ, négligeable devant h en a, telle que : $\forall x\in[\ldots],\ f(x) = g(x)+\varphi(x)$.

II Équivalence de fonctions

Définition 3 - Fonctions équivalentes

Soient $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et f,g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler a).
On dit que **les fonctions f et g sont équivalentes en a** (ou au voisinage de a) lorsque :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Dans ce cas, on écrira : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Petite remarque
On peut aussi dire que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand x tend vers a.

☞ Pour info...
En fait, on peut donner une définition plus générale (sans la condition sur g) :
f est équivalente à g lorsqu'il existe un voisinage V_a de a et une fonction ε tels que : $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ et $\forall x\in[\ldots],\ f(x) = g(x)+g(x)\varepsilon(x)$.
Autrement dit :
$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x)-g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$

Exemples 3

E1 $x^2+2x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$

E2 $x^2+2x+1 \underset{x\to0}{\sim} 1$

E3 $e^x + x \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$

Trouver une fonction g équivalente à f en a c'est trouver une fonction qui a le même comportement que f au voisinage de a. Le but étant de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que celle de f...

Propriétés 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2, h$ sept fonctions définies au voisinage de a telles que g, g_1, g_2, h ne s'annulent pas au voisinage de a (elles peuvent s'annuler en a).

P1# $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ *(réflexivité)*

P2# $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ *(symétrie)*

P3# $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *(transitivité)*

P4# $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

P5# $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R}) \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$

P6# $\left.\begin{array}{l} f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_1(x)$ *(compatibilité avec le produit)*

P7# $\left.\begin{array}{l} f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$ *(compatibilité avec le quotient)*

P8# $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ f \text{ est strictement positive au} \\ \text{voisinage de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$ *(compatibilité avec la puissance)*

P9# $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$ *(compatibilité avec la valeur absolue)*

⋆ Démonstration : On adapte celles du chapitre 1... ⋆

Exemples 4

E1 Donnons un équivalent simple de $f : x \longmapsto \dfrac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2x^3 + 4x + 3}$ en $+\infty$ puis en 0.

E2 On sait que :

$$x + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \quad ; \quad x + \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Ainsi, par symétrie et transitivité :

$$x + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x + \mathrm{e}^{-x}$$

On a aussi trivialement :

$$-x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$$

Ainsi, **si on pouvait sommer les équivalents**, on obtiendrait :

$$\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x} \quad : \quad \text{FAUX !}$$

Conclusion : ....

E3 Les fonctions $x \longmapsto \ln(x+1)$ et $x \longmapsto \ln(x)$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

E4 Les fonctions $x \longmapsto \exp(x+1)$ et $x \longmapsto \exp(x)$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

À retenir... Exemple classique pour justifier que, de façon générale, on ne compose pas les équivalents !

Conclusion : ....

Trois choses importantes sur les équivalents :

1. Il est interdit de sommer des équivalents !
2. Il est interdit d'appliquer une fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence !
3. Si un jour on arrive à écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa ! Pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ n'est pas permise !

Théorème 1 – Équivalents usuels

T1# Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels.

- La fonction $x \longmapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.
- La fonction $x \longmapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est équivalente en 0 à son terme non nul de plus bas degré.

T2# Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

T3# On en déduit :

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1 \quad ; \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si h est une fonction non nulle telle que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$, alors :

$$\ln(1+h(x)) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \quad ; \quad e^{h(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} h(x) \quad ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1+h(x))^\alpha - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha h(x)$$

Cas particulier

Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2} x$

★ Démonstration :

★