Les Chartreux

Exercices du chapitre 3
Réduction des matrices carrées

●○○○ Exercice 1 - Changement de base

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Justifier que l'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base constituée d'un unique vecteur noté e_1.
2. Justifier que l'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = 2u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base constituée de deux vecteurs notés e_2 et e_3.
3. Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers cette base. On notera P cette matrice.
4. Déterminer P^{-1}.
5. Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3). On notera D cette matrice.
6. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

●○○○ Exercice 2 - Que des 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que 3 est valeur propre de A et déterminer une base de l'espace propre associé.
2. Déterminer, sans calcul, une autre valeur propre de A puis déterminer une base de l'espace propre associé.
3. Donner deux matrices P et D telles que P est inversible, D est diagonale et $A = PDP^{-1}$.

●●○○ Exercice 3 - Diagonalisable ou pas ?

Dans chaque cas, étudier la diagonalisabilité de la matrice A.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

●●○○ Exercice 4 - Sans calcul !

Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

●●○○ Exercice 5 - Théorème spectral dans le cas $n = 2$

Démontrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

●●○○ Exercice 6

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad ; \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ puis une de $\ker(f)$.
2. En déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. Démontrer que f est diagonalisable.

●●○○ **Exercice 7 - Matrices élémentaires**
Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Parmi les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, lesquelles sont diagonalisables ?

●●○○ **Exercice 8 - Avec des polynômes**
On considère l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(P)(x) = P(x+2) - P(x)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. 2.a. Soit $P \in \ker(f)$. Montrer que la fonction polynomiale $x \longmapsto P(x) - P(0)$ est nulle.
   2.b. En déduire que $\ker(f) = \mathbb{R}_0[x]$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, notée A.
4. Calculer A^3 puis en déduire le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

●●○○ **Exercice 9 - Avec des polynômes**
Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On considère l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(P)(x) = P(x) - (x+1)P'(x)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Justifier que f est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

●●○○ **Exercice 10 - Vrai ou faux ?**
1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A admet au plus n vecteurs propres.
2. Si deux matrices sont semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.
3. Si deux matrices ont les mêmes valeurs propres, alors elles sont semblables.
4. Il existe des matrices n'ayant aucune valeur propre réelle.
5. Si A est diagonalisable, alors pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, A^k est diagonalisable.
6. Si, pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
7. La somme de deux matrices diagonalisables et diagonalisable.
8. Le produit de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.
9. Il existe une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

●●○○ **Exercice 11**
Notons f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer les éléments propres.

●●○○ **Exercice 12 - Type écrit**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Démontrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Déterminer le rang de $A - 2I_3$.
5. En déduire 2 est valeur propre de A et déterminer une base du sous-espace propre associé, noté E_2.
6. Posons $u = (-1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$.
   6.a. Vérifier que $f(v) \in \text{Vect}(u, v)$.
   6.b. Résoudre l'équation $f(x) = 2x + v$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.
   6.c. Posons $w = (-1, 0, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   6.d. Donner la matrice de f dans la base (u, v, w) et expliciter une matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
7. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n en fonction de n.
8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.
9. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\right\}$.
   9.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   9.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

   $$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

   9.c. Démontrer que $\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   9.d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
10. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 + I_3 = A\}$.
    10.a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?

10.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$

10.c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

10.d. En déduire, à l'aide de la question 9.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.

10.e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

●●○○ Exercice 13 - EDHEC 2015 E

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et on f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. 1.a. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   1.b. En déduire la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.
2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.
   2.a. Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{B}$ puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.
   2.b. En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.
   2.c. Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.
3. 3.a. Établir : $D(D + I_3)(D - 3I_3) = 0$.
   3.b. En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est annulateur de C.
4. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On admet (principe de division euclidienne) qu'il existe un unique polynôme Q_n et trois uniques réels a_n, b_n, c_n tels que :
$$X^n = P(X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$$
   4.a. Déterminer l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   4.b. Déduire de ce qui précède une expression simple de C^n en fonction de C et C^2.
   4.c. L'expression obtenue est-elle valable si $n = 1$?

●●○○ Exercice 14 - Ecricome 2015 E

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, la matrice A est inversible.

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
4. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathscr{B}$ est : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme φ_A.
6. L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ?

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

7. Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :
$$\varphi_A(M) = \lambda M$$
Montrer, par un raisonnement par l'absurde, que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
8. Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.
On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.
Montrer que N et N' sont des vecteurs propres de l'endomorphisme φ_A associés à la valeur propre μ.
9. Comparer le spectre de l'endomorphisme φ_A et le spectre de la matrice A.
10. Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

●●○○ Exercice 15 - EML 2016 E

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ainsi que $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. 3.a. Justifier que A est diagonalisable.
   3.b. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe la matrice AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
9. 9.a. Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
   9.b. En déduire que toute valeur propre λ de F vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
   9.c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?
11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$.
12. 12.a. Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
    12.b. Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

●●○○ Exercice 16 - EDHEC 2013 E

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   1.a. Vérifier que $A^2 \neq 0$ et que $A^3 = 0$.
   1.b. Déterminer une base (a) de $\ker(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\mathrm{Im}(f)$.
   1.c. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \ker(f)$.
2. On considère maintenant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$. On note M la matrice canoniquement associée à g. L'objectif de la question est d'établir que $\mathrm{Im}(g^2) = \ker(f)$.
   2.a. 2.a.i. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M.
   2.a.ii. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de M.
   2.a.iii. En déduire que la matrice M n'est pas diagonalisable.
   2.b. 2.b.i. Justifier l'existence d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
   2.b.ii. Montrer que la famille $\big(u, g(u), g^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.
   2.b.iii. Donner la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$, notée N.
   2.b.iv. Déterminer alors une base de $\ker(g)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(g^2)$. Conclure.

●●○○ Exercice 17 - Ecricome 2023 E (sujet zéro 2)

Partie 1

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = x^3 - 3x$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormée du plan.

1. Étudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les variations de f sur $[0; +\infty[$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est convexe sur $[0; +\infty[$ et que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.
4. On note $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de $\mathscr{T}$ et préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.
5. Tracer, sur une même figure, la droite $\mathscr{T}$ ainsi que l'allure de $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$.
6. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   6.a. Montrer que si $|a| < 2$, alors l'équation $x^3 - 3x + a = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède exactement trois solutions réelles.
   6.b. Montrer que si $|a| > 2$, alors l'équation $x^3 - 3x + a = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède une unique solution réelle.

Partie 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

7. 7.a. Calculer $A_a^3 - 3A_a + aI_3$.

 7.b. Soit λ un réel tel que $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$ et soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$. Exprimer $A_a X$ en fonction de λ et X.

 7.c. Déduire des deux questions précédentes que pour tout réel λ :

$$\big(\lambda \text{ est valeur propre de } A_a\big) \iff \lambda^3 - 3\lambda + a = 0$$

8. **Dans cette question uniquement, on suppose $a = 2$.**

 8.a. Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de la matrice A_2.

 8.b. La matrice A_2 est-elle diagonalisable ?

9. **Dans cette question uniquement, on suppose $|a| > 2$.**
 La matrice A_a est-elle diagonalisable ?

10. **Dans cette question uniquement, on suppose $|a| < 2$.**

 10.a. Montrer que la matrice A_a est diagonalisable.

 10.b. On note λ, μ, ν les valeurs propres de A_a et on considère les matrices $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ ainsi que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \end{pmatrix}$.

 Justifier que P est inversible et exprimer A_a en fonction de P et D.

Partie 3

Pour tout réel a, on considère l'équation différentielle (E_a) suivante, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$(E_a) \quad : \quad y''' - 3y' + ay = 0$$

11. **Dans cette question uniquement, on suppose $a = 0$.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

Dans la suite de l'exercice, pour tout fonction $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$.

12. Soit $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout réel a, y est solution de (E_a) si, et seulement si, $Y' = A_a Y$.

13. **Dans cette question uniquement, on suppose $|a| < 2$.**

 13.a. Soit $y \in \mathscr{C}^3(R, \mathbb{R})$. Montrer que y est solution de (E_a) si, et seulement si, $Z' = DZ$, où $Z = P^{-1}Y$.

 13.b. En déduire que l'ensemble des solutions de (E_a) est $\{x \longmapsto \alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 e^{\mu x} + \alpha_3 e^{\nu x} \ / \ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3\}$.

 13.c. Vérifier la cohérence avec le résultat de la question 11.

●●○○ Exercice 18 - Type écrit

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 - A$.
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés. Donner deux matrices P, D telles que P est inversible, D est diagonale et $A = PDP^{-1}$. *On rangera les coefficients de D dans l'ordre croissant.*
3. L'objectif de cette question est de résoudre l'équation $P(M) = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où $P(X) = X^5 + X + 1$.

 3.a. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Établir : $P(M) = A \iff P(N) = D$.

 3.b. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

  3.b.i. Montrer que si $P(N) = D$, alors N et D commutent.

  3.b.ii. En déduire que si $P(N) = D$, alors N est diagonale.

  3.b.iii. On note $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Démontrer alors : $P(N) = D \iff \begin{cases} P(a) = -1 \\ P(b) = 1 \\ P(c) = 3 \end{cases}$.

 3.c. Démontrer que la fonction polynomiale $P : x \longmapsto x^5 + x + 1$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

 3.d. Déduire des questions précédentes les matrices N telles que $P(N) = D$.

 3.e. Conclure sur les solutions de l'équation $P(M) = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

●●○○ Exercice 19 - Dérivation

Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'application qui à toute fonction de E associe sa dérivée.
Déterminer les valeurs propres de D ainsi que les sous-espaces propres associés.

●●○○ Exercice 20 - Une matrice utile en analyse numérique...

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On assimilera les matrices de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ aux réels.

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. L'objectif de cette question est d'établir que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
   - 2.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$. Quelle est la nature de ${}^tXAX$?
   - 2.b. Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Exprimer ${}^tXAX$ en fonction de $\lambda, a, b, c, d, e, f$.
   - 2.c. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tXAX$ puis démontrer que ${}^tXAX \geq 0$.
   - 2.d. Déduire des deux questions précédentes que les valeurs propres de A sont strictement positives.

●●●○ Exercice 21 - Trace d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **trace de A**, notée $\text{tr}(A)$, le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

1. Démontrer que l'application $A \longmapsto \text{tr}(A)$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. En déduire que si deux matrices sont semblables, alors elles ont la même trace. La réciproque est-elle vraie ?

●●●○ Exercice 22 - Matrices stochastiques

Définition 1 - Matrice stochastique

On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.
2. Justifier que 1 est valeur propre de toute matrice stochastique.
3. Démontrer que si λ est valeur propre d'une matrice stochastique, alors $|\lambda| \leq 1$.

   Indication : on pourra considérer un vecteur propre $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *associé à λ et k l'indice tel que* $|x_k| = \max\left(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\right)$.

●●○○ Exercice 23 - Type oral

1. **Question de cours.** Définition de deux matrices semblables.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $2f - f^2 = \text{id}$.
3. En déduire que f est un automorphisme et donner son automorphisme réciproque.
4. Déterminer l'unique valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
6. 6.a. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.
   - 6.b. La résultat précédent est-il valable si $n \in \mathbb{Z}$?
7. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

●●○○ Exercice 24 - Type oral (sans préparation)

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que NM est diagonalisable.

1. Montrer que si M est inversible, alors MN est aussi diagonalisable.
2. Trouver deux matrices non inversibles $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que NM soit diagonalisable et MN ne le soit pas.