Les Chartreux

3

Algèbre linéaire

Diagonalisation des matrices carrées

Introduction...

Dans ce chapitre, nous complétons l'étude des endomorphismes en dimension finie sur deux aspects liés :

- les changements de base : il s'agit de voir le lien entre deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases différentes ;
- la réduction des endomorphismes (ou de leurs matrices associées) dont l'objectif est assez simple : trouver (si possible) une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est diagonale (c'est l'idéal !).

Pour bien démarrer...

1 # **Définitions.** (E et F désignent des espaces vectoriels réels)

- La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible lorsque :

- E' est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

- la famille $(e_1, e_2, ...e_n)$ est une famille libre de E lorsque :

- la famille $(e_1, e_2, ...e_n)$ est une famille génératrice de E lorsque :

- $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire lorsque :

- Endomorphisme ? Isomorphisme ? Automorphisme ?

- Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire : $\ker(f) =$ .... et $\mathrm{Im}(f) =$ ....

- Injectivité + caractérisation dans le cas des applications linéaires :

2 # Base canonique de $\mathbb{R}^n$: .... Base canonique de $\mathbb{R}^2$: ....

Base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: .... Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: ....

Base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: .... Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ....

3 # Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire et injective, alors $\dim(E)$...... $\dim(F)$
Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire et surjective, alors $\dim(E)$...... $\dim(F)$
Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire et bijective, alors $\dim(E)$...... $\dim(F)$

4 # **Théorème du rang.**

5 # Conséquence : si $\dim(E) = \dim(F)$, alors

6 # Liens application linéaire / matrice :

Dans tout ce chapitre, E désignera un espace vectoriel réel de dimension finie (notée n) et f un endomorphisme de E.

I Changements de base

Définition 1 – Matrice de passage

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
La **matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$**, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, est la matrice dont la j-ième colonne contient les coordonnées de e'_j dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \dots & e'_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & (\bigstar) & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Petite remarque
En fait :
$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\dots\dots}(\mathrm{id})$

Exemples 1

E1 Montrons que la famille $\mathscr{B}' = \big((1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis donnons la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathscr{B}'$.

E2 Montrons que la famille $\mathscr{B}' = \big(1, 1+X, 1+X+X^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donnons la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathscr{B}'$.

Propriété 1

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et $P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

⋆ Démonstration : On a remarqué que : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})$.
Or, id est bijectif, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})$ est inversible. Autrement dit, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible. De surcroît :

$$\begin{aligned} P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})^{-1} && \text{ECG1 - chapitre 20 - propriété 10} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}^{-1}) && \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \end{aligned}$$

⋆

Et on a même :

Propriété 2

Une matrice carrée est une matrice de passage si, et seulement si, elle est inversible.

⋆ Démonstration : Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Une matrice de passage est inversible, d'après la propriété 1.

$\boxed{\Longleftarrow}$

⋆

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour montrer qu'une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base,** on peut montrer que la matrice $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & \dots & e_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} & (\bigstar) & \end{pmatrix} \end{array}$ bc est inversible...

Propriétés 3 - Formules de changement de base

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

P1# Pour tout $x \in E$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

P2# Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \end{aligned}$$

♡ **Astuce du chef !** ♡
Pour mieux retenir ces formules, on ne peut que regarder la concordance des bases consécutivement écrites... un peu comme la relationd e Chasles.

⋆ Démonstration :

P1# Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(\mathrm{id}(x)\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) && \text{ECG1 - chapitre 20 - théorème 3} \\ &= = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) \end{aligned}$$

P2# Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(\mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}) && \text{ECG1 - chapitre 20 - théorème 6} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} && \text{propriété 1} \end{aligned}$$

⋆

Exemple 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Dans Exemples 1 - E1, on a montré que la famille $\mathscr{B}' = \big((1,0,1), (-1,1,0), (1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donnons la matrice de f dans $\mathscr{B}'$, notée T, puis écrivons une égalité reliant A et T.

Petite remarque

Bien évidemment, cette formule de changement de base peut également servir pour déterminer la matrice d'une application linéaire dans une certaine base ; mais pour cela, il faut déjà avoir inversé la matrice de passage.

Pour conclure cette partie, une dernière définition suivie d'une propriété assez théorique, mais utile.

Définition 2 - Matrices semblables

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les matrices M et N sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M = PNP^{-1}$$

Petite remarque

Cette définition est bien symétrique (on dit que M et N sont semblables, pas seulement que M est semblable à N...) puisque :

$M = PNP^{-1} \iff N =$ ....

Propriété 4 - Caractérisation des matrices semblables

Deux matrices (différentes) sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases (différentes).

Démonstration : Raisonnons par double implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat d'après Propriétés 3 - P2.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que M et N sont semblables. Il existe alors une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que : $M = PNP^{-1}$.
Montrons qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ telles que M et N représentent toutes deux f.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E canoniquement associé à M.

Pour tout $j \in [\![; n]\!]$, on pose : $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$. Ainsi, en notant $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$, on a alors : $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

L'égalité $M = PNP^{-1}$ s'écrit alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} N P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} N &= P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} M P^{-1}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} M P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \quad \text{propriétés 3 - P2} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \end{aligned}$$

Par conséquent, M et N sont toutes deux des matrices représentant le même endomorphisme.

II Éléments propres d'une matrice carrée

Tout ce qui suit dans le chapitre concerne les matrices carrées. Toutes les notions peuvent être formulées sur les endomorphismes, mais cela n'est plus dans l'esprit du programme de Mathématiques Appliquées. Volontairement, le cours sera conforme au programme, mais les exercices traités pourront utiliser le même vocabulaire sur les endomorphismes.

II.1 Définitions et premiers résultats

Définitions 3 - Valeurs propres, vecteur propres et spectre d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D1# Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est **valeur propre de A** lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{ET} \quad AX = \lambda X$$

Un tel vecteur X est un **vecteur propre de A associé à la valeur propre λ**

D2# Le **spectre de A**, noté $\mathrm{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A.

Important !

La condition $X \neq 0_{n,1}$ est nécessaire, sinon tous les réels seraient valeur propre de toutes les matrices...

☞ **Pour info...**

Si A est la matrice d'un endomorphisme f, alors $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$ et on veille au changement d'objet pour les vecteurs propres...

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour montrer qu'un vecteur X est vecteur propre de A :**

- on vérifie que $X \neq 0_{n,1}$,
- on calcule AX pour l'écrire sous la forme qqch $\times$ X, le qqch étant alors une valeur propre de A.

Exemple 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrons que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

Propriétés 5

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. On note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\}$.

P1# $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

P2# $1 \leq \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq n$

Vocabulaire

$E_\lambda(A)$ est le **sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.**

✘ Attention !

$E_\lambda(A)$ n'est pas l'ensemble des vecteurs propres associés à λ... C'est l'ensemble constitué du **vecteur nul et de tous les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.**

⋆ Démonstration :

À retenir...

On aurait aussi pu remarquer que $E_\lambda(A) =$ ....
En particulier : $E_0(A) =$ ....

⋆

Propriétés 6

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p \in [\![2; +\infty[\![$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres **distinctes** de A.

P1# **Cas particulier.** Si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, alors la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

P2# **Cas général.** Si, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $\mathscr{F}_i$ est une famille libre de $E_{\lambda_i}(A)$, alors la concaténation des familles $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_p$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En gros...

Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

⋆ Démonstration : Démontrons le cas particulier. Le cas général est analogue mais un peu plus lourd à écrire.

Propriétés 7 - Nombre maximal de valeurs propres (HP ?)

P1# Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

P2# Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. On a :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \leq n$$

Autrement dit : On dit parfois qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres *comptées avec leur multiplicité géométrique*, la multiplicité géométrique (il existe aussi une multiplicité algébrique, hors programme) d'une valeur propre désignant la dimension de l'espace propre associé.

Démonstration :

P1# Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons p le nombre de valeurs propres distinctes de A et $X_1, X_2, \ldots, X_p$ des vecteurs propres associés à ces p valeurs propres respectivement.
D'après la propriété précédente, la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi :

$$\mathrm{Card}\left(X_1, X_2, \ldots, X_p\right) \leq \dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)$$

D'où :

$$p \leq n$$

☞ Rappel... Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.
- Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leq \dim(E)$.
- Si $\mathscr{F}$ est génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geq \dim(E)$.

P2# Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, notons $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(A)$. Puisqu'une base est en particulier une famille libre, d'après la propriété précédente (cas général), la concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_p$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Notons $\mathscr{F}$ cette famille libre obtenue par concaténation. On a ainsi :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leq n$$

Mais, puisque $\mathscr{F}$ est la concaténation des familles $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_p$, on a également :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(\mathscr{F}) &= \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(\mathscr{B}_i) && \text{pour tout } i \in [\![1;p]\!],\ \mathscr{B}_i \text{ est une base de } E_{\lambda_i}(A) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \leq n$.

Petite remarque P1 est un cas particulier de P2. En effet, puisque pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \geq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \geq p$. Et par transitivité, on retrouve : $p \leq n$.

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour déterminer une base de $E_\lambda(A)$,** on peut :
1. résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
2. ou déterminer la dimension de $E_\lambda(A)$ puis trouver une famille libre de bon cardinal...

Exemple 4

Notons $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. D'après l'exemple précédent, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Déterminons, deux deux façons différentes, une base de $E_2(A)$.

Le plus difficile est bien souvent la recherche des valeurs propres...

II.2 Recherche de valeurs propres

Commençons par transformer notre recherche...

Propriété 8 - Caractérisation des valeurs propres

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\big(\lambda \text{ est valeur propre de } A\big) &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}\\ &\iff \mathrm{rg}(A-\lambda I_n) \neq n\\ &\iff \big(A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\big)\end{aligned}$$

À retenir...
0 est VP de A ssi A n'est pas inversible.

⋆ Démonstration : QC24 ⋆

♣ **Méthode 4** ♣ **Pour déterminer les valeurs propres de A :**

1. si A est triangulaire (ou diagonale), alors ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux ;
2. si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors on utilise le déterminant pour trouver les réels λ tels que $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible ;
3. sinon, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour trouver les réels λ tels que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ n'est pas maximal (on se ramène au rang d'une matrice triangulaire).

Exemples 5

E1 Les matrices suivantes admettent toutes 0 comme valeur propre :

E2 Déterminons le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E3 Déterminons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

E4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrons que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^tA)$.

Voyons maintenant une notion accompagnée d'un résultat qui nous sera, en pratique, très utile.

Définition 4 - Polynôme annulateur d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
Le polynôme P est **annulateur de A** lorsque : $P(A) = 0_n$.

Exemple 6

Montrons que le polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$ est annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déduisons-en que A est inversible et donnons A^{-1}.

Peut-on donner un autre polynôme annulateur de A ?

✘ Attention !
On dira donc toujours UN **polynôme annulateur** de A.

Théorème 1 - Existence de polynôme annulateur (HP)

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Petite remarque

Au moins un... et donc, une infinité !
En effet, si P est annulateur de A, alors pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, QP est encore annulateur de A...

⋆ Démonstration :

⋆

☞ Pour info...

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède même un polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égale à n...

Propriété 9 - Lien valeur propre / polynôme annulateur

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
Si P est annulateur de A, alors toute valeur propre de A est racine de P.
Autrement dit, si P est annulateur de A, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \{r \in \mathbb{R} \ / \ P(r) = 0\}$.
Ou encore : si P est annulateur de A, alors les valeurs propres de A sont parmi les racines de P.

✘ Attention !

On a seulement une inclusion ! Toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas nécessairement des valeurs propres de A... Sinon, tout réel serait valeur propre de A.

⋆ Démonstration :

$\star$

♣ MÉTHODE 5 ♣ Pour déterminer les valeurs propres de A :
Si l'énoncé fait apparaître un polynôme annulateur de A, alors :

- on cherche les racines de ce polynôme,
- pour chaque racine r trouvée :
  - ◇ soit on résout $AX = rX$, et si l'ensemble des solutions est non réduit au vecteur nul, alors r est valeur propre de A (sinon, r n'est pas valeur propre de A)
  - ◇ soit on justifie / on voit que la matrice $A - rI_n$ n'est pas inversible, et dans ce cas, r est valeur propre de A (sinon, r n'est pas valeur propre de A)
  - ◇ soit on trouve un vecteur non nul X tel que $AX = rX$, et dans ce cas, r est valeur propre de A.

Important !
L'évènement "l'énoncé donne un polynôme annulateur dont une racine n'est pas valeur propre de A" est quasi-impossible.
En pratique, l'énoncé fournit le *meilleur* polynôme annulateur qui soit...

EXEMPLE 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et on admet que $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$.
Déterminons les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

Enfin, pour terminer cette partie :

♣ **Méthode 6** ♣ **Pour déterminer quelques valeurs propres de A :**

1. si A n'est pas inversible (donc si $\ker(A) \neq \{0_{n,1}\}$ ou si $\mathrm{rg}(A) \neq n$), alors 0 est valeur propre de A ;
2. si la somme des coefficients de chacune des lignes de A est égale au même réel s, alors s est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé ;
3. puisque $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$, si la somme des coefficients de chacune des colonnes de A est égale au même réel s, alors s est valeur propre de A (mais nous n'avons pas d'expression générale d'un vecteur propre associé) ;
4. si A est carrée de taille n et que l'on connait déjà $n-1$ valeurs propres de A, alors la dernière s'obtient en soustrayant la somme des VP déjà trouvées à la somme des coefficients diagonaux de A (la trace de A).

✘ Attention !

• Il est rare de pouvoir trouver toutes les valeurs propres d'une matrice de cette façon...
• La notion de trace d'une matrice est hors programme et le point 4. également. En pratique, on pourra en revanche écrire : "on remarque que ... est VP de A, car ... [utilisation de la caractérisation des valeurs propres]"

Exemple 8

Déterminons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé sans résoudre aucun système.

III Théorèmes de réduction des matrices carrées

Définition 5 - Matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est **diagonalisable** lorsqu'il existe deux matrices $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$P \text{ est inversible, } D \text{ est diagonale et } A = PDP^{-1}$$

☞ Pour info...

Un endomorphisme f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Théorème 2 - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Et, dans ce cas, si :

- D est la matrice diagonale constituée des valeurs propres de A,
- P est la matrice de passage de la base canonique vers cette base de vecteurs propres de A,

alors : $A = PDP^{-1}$.

♡ Astuce du chef ! ♡
L'avantage de travailler avec l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et pas celui d'un autre EV : les objets sont les mêmes !
En effet, f n'est autre que l'application $X \longmapsto AX$. Et ainsi, les vecteurs propres de f sont exactement les vecteurs propres de A...

⋆ Démonstration : Raisonnons par double implication et travaillons avec les applications linéaires... Notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est diagonalisable et considérons deux matrices $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les coefficients diagonaux (rangés de haut en bas dans cet ordre) de D. Puisque les matrices A et D sont semblables, d'après la propriété 4, elles représentent toutes deux le même endomorphisme.
Par conséquent, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Mais, D étant diagonale, on obtient :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \ f(e_i) = \lambda_i e_i$$

Or $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc, nécessairement, les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ sont tous non nuls.
On en déduit que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, λ_i est valeur propre de f (et donc de A) et que e_i est un vecteur propre de f (et donc de A) associé à la valeur propre λ_i.
Conclusion : $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Considérons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une telle base et, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, notons λ_i la valeur propre à laquelle est associé le vecteur propre e_i.
On a ainsi :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \ f(e_i) = \lambda_i e_i$$

Petite remarque
Les $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ne sont pas nécessairement distinctes !

Et ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

☞ Rappel...
Se souvenir de la manière dont on remplit une matrice...

Notons alors $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = P_{\mathrm{bc},\mathscr{B}}$. D'après la formule de changement de base (propriétés 3 - P2), on a ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{bc}(f) &= P_{\mathrm{bc},\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathrm{bc}} \quad P_{\mathscr{B},\mathrm{bc}} = P_{\mathrm{bc},\mathscr{B}}^{-1} \\ &= PDP^{-1} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$A = PDP^{-1}$$

Conclusion : A est diagonalisable.

⋆

Exemple 9

Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exemple 8. Montrons que A est diagonalisable et donnons une matrice P inversible ainsi qu'une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

✘ Attention !
On veille bien à l'ordre dans lequel sont rangés les valeurs propres dans D ainsi que les vecteurs propres correspondant dans P...

Théorème 3 - Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice carrée (HP ?)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Petite remarque
Pas facile de savoir si cette propriété est au programme ou non. Dans le doute, il faut savoir refaire le raisonnement mis en place, qui est d'ailleurs le raisonnement utilisé dans Exemples 9 - E1.

$\star$ Démonstration : Supposons que A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Notons, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i ; et notons également $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
On sait que :

- la famille $\mathscr{B}$ est libre, car constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (propriétés 6),
- $\text{Card}(\mathscr{B}) = n = \dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)$.

Par conséquent, la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Conclusion : d'après le théorème 2, la matrice A est diagonalisable. $\star$

Exemple 10

Puisque la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
Par conséquent, cette matrice possède trois valeurs propres distinctes.

Conclusion : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Théorème 4 - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice carrée (HP)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. On a :

$$\left(A \text{ diagonalisable}\right) \iff \sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) = n$$

☞ Pour info...
C'est un théorème très important, qui sert également pour démontrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable. Mais il semble être passé HP.

$\star$ Démonstration : Raisonnons par double implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) = n$.

Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, notons $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(A)$. Puisqu'une base est en particulier une famille libre, d'après les propriétés 6 (cas général), la concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_p$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Notons $\mathscr{F}$ cette famille libre obtenue par concaténation.
Mais, puisque $\mathscr{F}$ est la concaténation des familles $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_p$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathscr{F}) &= \sum_{i=1}^{p} \text{Card}(\mathscr{B}_i) && \text{pour tout } i \in [\![1;p]\!],\ \mathscr{B}_i \text{ est une base de } E_{\lambda_i}(A) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \\ &= n \end{aligned}$$

Par conséquent :

- ◇ $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
- ◇ $\text{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)$.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de A.
Conclusion : d'après le théorème 2, A est diagonalisable.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est diagonalisable. D'après le théorème 2, il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une telle base. Quitte à réordonner $\mathscr{B}$, on peut supposer que :

- ◇ $\mathscr{F}_1 = (e_1, \ldots, e_{n_1})$ est une famille de vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ_1,
- ◇ $\mathscr{F}_2 = (e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2})$ est une famille de vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ_2,
- ◇ ...
- ◇ $\mathscr{F}_p = (e_{n_1+n_2+..+n_{p-1}+1}, \ldots, e_n)$ est une famille de vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ_p

Autrement dit :
Les n_1 premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une famille de $\vec{\text{V}}$Passociés à λ_1, les n_2 suivant forment une famille de $\vec{\text{V}}$Passociés à λ_2, ..., les n_p derniers forment une famille de $\vec{\text{V}}$Passociés à λ_p.

Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, elle est en particulier libre. Ainsi, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\mathscr{F}_i$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc de $E_{\lambda_i}(A)$.
D'où :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ \text{Card}(\mathscr{F}_i) \leq \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right)$$

☞ Rappels...
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Puis, en sommant :

$$\sum_{i=1}^{p} \text{Card}(\mathscr{F}_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right)$$

Autrement dit :

$$\sum_{i=1}^{p} n_i \leq \sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right)$$

Or :

- ◇ d'après propriétés 7 - P2 : $\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \leq n$
- ◇ par définition des $\mathscr{F}_i$, on a : $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$

D'où :

$$n \leq \sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \leq n$$

Conclusion : $\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) = n$.

Petite remarque

On pourrait également voir le théorème 3 comme un cas particulier du théorème 4... En effet, si $p = n$, alors, puisque chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1 et que (propriétés 7) la somme des dimensions est inférieure ou égale à n ; on obtient nécessairement que chaque sous-espace propre est de dimension exactement 1. Par conséquent, la somme des dimensions vaut n... et donc A est diagonalisable.

⋆

Exemple 11

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Propriété 10 - Cas d'une unique valeur propre (HP ?)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ diagonalisable} \\ A \text{ possède une unique valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \lambda I_n$$

⋆ Démonstration :

★ Classique ! ★
Résultat classique, à savoir redémontrer très rapidement si besoin.

Petite remarque
La réciproque est évidemment vraie !

⋆

Exemple 12

Puisque la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Cette matrice admet donc une unique valeur propre.

Si elle était diagonalisable, il existerait alors une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On aurait alors :

$$\begin{array}{rcl} A & = & P \times 3I_3 \times P^{-1} \\ & = & 3PP^{-1} \\ & = & 3I_3 \end{array}$$

Or, $A \neq 3I_3$...

Conclusion : la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Théorème 5 - Théorème spectral

Toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

⋆ Démonstration : Nous manquons d'outils pour démontrer le cas général ; mais le cas $n = 2$ est facile ! En exercice ? ⋆

Exemple 13

Les matrices suivantes sont diagonalisables :

Exemple classique d'utilisation de la réduction (diagonalisation ou trigonalisation) d'une matrice A : la calcul simplifié des puissances de A. Mais dans quels types d'exercices peut-on rencontrer ceci ?