Les Chartreux

Exercices du chapitre 2
Couples et suites de variables aléatoires discrètes

●○○○ Exercice 1

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Montrer que si f est positive et majorée, alors la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance.

●○○○ Exercice 2

On effectue une succession de lancers indépendants d'une même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0;1[$; et on note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE obtenu ainsi que Y celle du premier FACE obtenu.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leur espérance et variance.
2. En distinguant des cas, déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
3. Vérifier par le calcul que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = 1$.

●○○○ Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont on donne la loi jointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{a}{2^{i+j} j!}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

●○○○ Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont on donne la loi jointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{a(i+j)}{2^{i+j} i! j!}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

●○○○ Exercice 5

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Une urne contient n balles numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 balles de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première balle et Y celui de la seconde balle.

1. Donner la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
3. En déduire la loi de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

●●○○ Exercice 6 - Calcul d'une somme double

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{i,j} = \dfrac{1}{(i+j)!}$.

1. 1.a. Établir : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ u_{i,j} \leq \dfrac{1}{j!}\dfrac{1}{(j+1)^i}$.

   1.b. En déduire que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{i\geq 0} u_{i,j}$ est convergente et que sa somme, notée s_j, vérifie : $s_j \leq \dfrac{2}{j!}$.

   1.c. Démontrer alors que la série double $\sum (i, j) \in \mathbb{N}^2 u_{i,j}$ est convergente. Pour la suite de l'exercice, on notera $a = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$.
2. Justifier l'existence d'un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{1}{a(i+j)!}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer simplement $\mathbb{P}([X + Y = n])$ en fonction de a et n.
4. En déduire la valeur de a.

●●○○ Exercice 7 - Deux géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs $\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{1}{2}$. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$.

1. Donner $Z(\Omega)$. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
2. Calculer $\mathbb{P}([Z = 0])$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}([Z = k])$ et $\mathbb{P}([Z = -k])$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.

●●○○ Exercice 8 - Minimum et loi uniforme

Dans toute l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$. On note $M = \min(X, Y)$.
   - 1.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}([X \geq k])$.
   - 1.b. Déterminer, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}([M \geq k])$.
   - 1.c. En déduire la loi de M.
2. Soient maintenant $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$. On note $M = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   - 2.a. Déterminer la loi de M.
   - 2.b. Notons $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 1]$. Démontrer : $\mathbb{P}(A) \geq 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

     Indication : $\forall x \in]-1; +\infty[,\ \ln(1 + x) \leq \ldots$.

●○○○ Exercice 9 - Avec des Bernoulli

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$; et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_i.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de S_n.
3. La variable aléatoire S_n suit-elle une loi binomiale ?

●○○○ Exercice 10 - Avec des Bernoulli (bis)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.
On pose : $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires S et D.
2. Déterminer la loi du couple (S, D). Calculer $\mathrm{Cov}(S, D)$.
3. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

●●○○ Exercice 11 - Autour de la loi de Poisson

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

1. Déterminer, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, la loi de S_n. Rappeler son espérance et son écart-type.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de S_n^*.
3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([S_n^* \leq 0]) = e^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

●○○○ Exercice 12

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*^+$. On considère trois variables aléatoires U, V, W indépendantes telles que : $U \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $W \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$.
On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Rappeler les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.
2. Justifier l'existence de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et la calculer.
3. En déduire $\rho(X, Y)$.

●○○○ Exercice 13 - Type écrit

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_*^+$). A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, l'auto-stoppeur lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0; 1[$).
On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, nombre de PILE obtenus et nombre de FACE obtenus.

1. 1.a. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}_{[N=j]}([X = i])$.

    1.b. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre λp.
2. Sans aucun calcul, mais en justifiant, donner la loi de Y.
3. Démontrer que X et Y sont indépendantes.
4. 4.a. Démontrer : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(N) + \mathbb{V}(X) - 2\text{Cov}(N, X)$.
   4.b. En déduire $\text{Cov}(N, X)$.

●○○○ Exercice 14 - ESC 2009 E

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire PILE est $p \in]0;1[$ et de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne numéro k contient k balles vertes et $n-k$ balles rouges.
L'expérience consiste à lancer n fois la pièce, puis piocher une unique balle dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de PILE obtenus.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une balle verte a été tirée, 0 sinon. Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. 1.a. Reconnaître la loi de X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k])$. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
   1.b. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 0])$ et $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = 0])$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{P}([Y = 1])$.
4. Donner alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
5. 5.a. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{n}$.
   5.b. En déduire la covariance du couple (X, Y).

●○○○ Exercice 15 - EML 1997 E

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE est un réel $p \in]0;1[$. Dans tout l'exercice N désigne un entier naturel non nul.
On effectue N lancers du dé et, si n désigne le nombre de 6 obtenus, alors on lance n fois la pièce. On définit ensuite les variables aléatoires suivantes : Z indique le nombre de 6 obtenus, X indique le nombre de PILE obtenus et Y indique le nombre de FACE obtenus.
Ainsi, $X + Y = Z$.

1. Donner la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Justifier que $X(\Omega) \subset [\![0;N]\!]$.
3. Soit $n \in [\![0;N]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = n]$.
4. Établir que pour tous entiers k et n tels que $0 \leq k \leq n \leq N$, on a : $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$. En déduire, pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}([X = k])$; puis reconnaître la loi de X.
5. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
7. En exprimant $\mathbb{V}(X + Y)$, calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

●●○○ Exercice 16 - ESC 1997 E

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules 1 et 2 ; alors que l'urne U_2 contient les boules 3,4,5,6.
On note $\mathcal{E}$ l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n répétitions de $\mathcal{E}$.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1,3,2,3,5. Quel est le contenu de U_1 à l'issue des 5 expériences $\mathcal{E}$ ainsi réalisées ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance.
3. 3.a. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   3.b. En déduire la loi de X_2.
   3.c. Calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
4. 4.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   - $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = \dfrac{1}{6}\mathbb{P}([X_n = 1])$
   - $\forall k \in [\![1;5]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \dfrac{7-k}{6}\mathbb{P}([X_n = k-1]) + \dfrac{k+1}{6}\mathbb{P}([X_n = k+1])$
   - $\mathbb{P}([X_{n+1} = 6]) = \dfrac{1}{6}\mathbb{P}([X_n = 5])$.

   4.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$.
   4.c. Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n)$. Donner alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$ et interpréter le résultat obtenu.
5. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul n et renvoyant une réalisation de X_n.
6. En déduire un programme **Python** demandant une valeur de n à l'utilisateur et permettant d'obtenir un histogramme approchant la loi de probabilité de X_n.

●●○○ Exercice 17 - Ecricome 2023 E (sujet 0 numéro 2)

Soit $p \in]0;1[$. On considère une pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE sinon. On effectue une succession de lancers indépendants de cette pièce jusqu'à l'obtention du second PILE, et on admet que cet évènement se produit presque-sûrement.
On note alors X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier PILE et X_2 le nombre de lancers supplémentaires effectués après le premier PILE jusqu'à l'apparition du second PILE.

1. Reconnaître la loi de X_1 et la loi de X_2.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
3. En déduire que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
4. Établir :
$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![, \ \mathbb{P}\big([X_1+X_2=n]\big) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus sur toute l'expérience.

5. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, prenant en argument d'entrée le réel p de $]0;1[$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.

```python
import numpy.random as rd
def simul_Y(p):
    Y=0
    nb_pile=0
    while .......... :
        if .......... :
            nb_pile=nb_pile+1
        else :
            ..........
    return Y
```

6. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2.
7. En déduire l'espérance, la variance ainsi que la loi de Y.

Une fois le second PILE obtenu, si l'on a obtenu un nombre n de FACE, alors on place $n+1$ balles numérotées de 0 à n dans une urne. On effectue ensuite un unique tirage dans cette urne et on note U la variable aléatoire égale au numéro obtenu. On note également $V = Y - U$.

8. Écrire une fonction **Python** `simul_UV` prenant en argument d'entrée la valeur du réel p et renvoyant une réalisation du couple (U, V). On pourra faire appel à la fonction `simul_Y` définie en question 5..
9. Justifier que $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et préciser $V(\Omega)$.
10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}\big([U=k]\big)$.
11. Montrer que la variable aléatoire $U+1$ suit une loi usuelle que l'on reconnaîtra. En déduire l'espérance et la variance de U.
12. Montrer que V suit la même loi que U.
13. 13.a. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
    13.b. En déduire la covariance du couple (Y, U).
    13.c. Montrer que le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y, U) est égal à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

●●○○ Exercice 18 - Ecricome 2022 E

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : "après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   1.a. Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   1.b. Expliciter $\mathbb{P}\big([X_n=0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n=n]\big)$.
   1.c. Justifier : $[Y_n=0] \cap [Z_n=0] = [X_n=n]$.
   1.d. Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n=0]$, $[Y_n=0]$ et $[Z_n=0]$.
   1.e. En déduire que : $\mathbb{P}(V_n) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
   On admet que l'évènement "au moins l'une des trois urnes reste toujours vide" est de probabilité nulle.
2. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.
   2.a. Compléter la fonction **Python** ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```python
import numpy.random as rd

def simul_T():
    X,Y,Z=0,0,0
    L=[X,Y,Z]
    n=0
    while ......
        i=rd.randint(0,3)
        L[i]=......
        n=n+1
    return ......
```

2.b. Écrire un script **Python** qui simule 10000 fois la variable aléatoire T et qui affiche une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

3. Déterminer $T(\Omega)$.
4. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([T=n]\big) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n)$.
5. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

6. 6.a. Donner la loi du couple (X_2, W_2).
   6.b. En déduire la loi de W_2, et calculer son espérance.
   6.c. Calculer la covariance de X_2 et W_2.
   6.d. Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

7. Déterminer $W_n(\Omega)$.
8. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.
   8.a. Démontrer : $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   8.b. Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.
   8.c. Exprimer alors $\mathbb{E}(W_n)$ en fonction de n.
9. Démontrer : $\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 2]\big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
   Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 2]\big)$?
10. Démontrer : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\big) = \dfrac{2}{3^n}\dbinom{n}{k}$.
    Que vaut $\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 1]\big)$?
11. Démontrer :
$$\mathbb{E}(X_n W_n) = 2n\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 2]\big) + \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\big)$$
12. Démontrer alors : $\mathbb{E}(X_n W_n) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Puis calculer la covariance de X_n et W_n.
13. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.

●●○○ Exercice 19 - EDHEC 2015 E

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. 1.a. Démontrer : $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.
   1.b. En déduire : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.
2. 2.a. Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.
   2.b. En déduire : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

2.c. Utiliser la question 1. pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

2.d. En conclure : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\,dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : "le joueur gagne". On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

3. Reconnaître la loi de N.
4. 4.a. Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.
   4.b. Écrire un script **Python** demandant à l'utilisateur un réel p de $]0;1[$, qui simule l'expérience puis affiche l'un des deux messages "le joueur a gagné" ou "le joueur a perdu".
5. 5.a. Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j]}([X = 2k+1])$.
   5.b. Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}([X = 2k+1])$.
   5.c. Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j]}([X = 2k+1])$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.
   5.d. Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}([X = 2k+1])$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.
6. 6.a. Justifier que $\displaystyle\mathbb{P}([X = 2k+1]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n])\mathbb{P}_{[N=n]}([X = 2k+1])$.
   En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, démontrer :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = 2k+1]) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$
   6.b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\mathbb{P}([X = 2k+1]) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\,dt$.
7. 7.a. Démontrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\,dt = 0$.
   7.b. Démontrer :
   $$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = 2k+1]) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\,dt\right)$$
   7.c. En déduire : $\displaystyle\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,dt$.
8. 8.a. Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :
   $$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$
   8.b. Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q.
   8.c. En déduire que $\mathbb{P}(A) > \dfrac{1}{2}$.

●●●○ Exercice 20 - Type oral

1. **Question de cours**. Formule des probabilités totales.

Un étudiant répond à un questionnaire de 20 questions. A chaque question, il obtient 1 point s'il répond correctement du premier coup, il obtient 0,5 point s'il répond correctement du second coup, et il n'obtient aucun point sinon.
Pour $i \in [\![1; 20]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à la i-ème question, et Y celle égale au nombre total de points obtenus au questionnaire.
A chaque question, il y a k (où $k \in [\![2; +\infty[\![$) réponses possibles, dont une seule est correcte. On suppose que les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_{20}$ sont indépendantes.

2. 2.a. Pour $i \in [\![1; 20]\!]$, déterminer la loi de Y_i.
   2.b. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
   2.c. Quelle valeur de k maximise $\mathbb{V}(Y)$?
3. On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issue du premier tour (respectivement du second tour).
   3.a. Déterminer la loi de X_1.
   3.b. Soit $j \in [\![0; 20]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $[X_1 = j]$, puis la loi de X_2.
4. Retrouver l'espérance de Y.