

L'objectif est l'utilisation de **Python** dans la modélisation d'expériences et variables aléatoires. Nous aurons besoin de la bibliothèque **numpy.random** à importer ainsi :

```
import numpy.random as rd
```

Nous aurons également besoin, pour les graphiques, d'importer :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Pour représenter un histogramme de données contenues dans la liste **Lvaleurs** en fonction de la listes de bornes **Lbornes**, on utilise :

```
plt.hist(Lvaleurs,Lbornes)
```

Après la création de l'histogramme, il faut rajouter la ligne **plt.show()** pour le représenter.

Nous aurons besoin de la commande **rd.random()** qui renvoie un réel aléatoire de $]0; 1[$

Petite remarque

Par défaut, il s'agit d'un histogramme d'effectifs. Pour obtenir un histogramme de fréquences, on ajoute **density=True** en option dans la commande **plt.hist()**.

I SIMULER LES LOIS BINOMIALE ET GÉOMÉTRIQUE AVEC RANDOM

Commençons par des rappels du cours de probabilités en complétant le tableau ci-dessous :

NOM & NOTATION	$X(\Omega)$	LOI DE PROBABILITÉ	CONTEXTE
uniforme sur $[[1; n]]$ $n \in \mathbb{N}^*$ $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$			
de Bernoulli de paramètre p $p \in]0; 1[$ $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$			
binomiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$ $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$			
géométrique de paramètre p $p \in]0; 1[$ $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$			
de Poisson de paramètre λ $\lambda > 0$ $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$			

Que permet de faire le programme suivant ?

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def bernoulli(p):
4     r=rd.random()
5     if r<p:
6         return 1
7     else :
8         return 0
```

I.1 LOI BINOMIALE

1. En utilisant la fonction donnée ci-dessus, écrire une fonction **liste_bernoulli** prenant en arguments d'entrée un entier naturel n et un réel p de $]0; 1[$ et renvoyant une liste de n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(p)$.
2. En déduire une fonction **binomiale** prenant en arguments d'entrée un entier naturel n et un réel p de $]0; 1[$ et renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n; p)$.
3. Proposer une autre fonction permettant de simuler une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n; p)$ qui n'utilise pas les fonctions précédentes.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22

I.2 LOI GÉOMÉTRIQUE

4. En utilisant la fonction **bernoulli**, écrire une fonction **geometrique** prenant en argument d'entrée un réel p de $]0; 1[$ et renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$.
5. Proposer une autre fonction permettant de simuler une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ qui n'utilise pas la fonction **bernoulli**.

1
2
3
4
5
6
7
8
9

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

II SIMULER LES LOIS USUELLES AVEC LES COMMANDES EXISTANTES

Des commandes à connaître :

- `rd.random(N)` renvoie N réels aléatoires de $]0; 1[$ dans un tableau 1 ligne \times N colonnes
- `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire de $[[a; b]]$
- `rd.randint(a,b,N)` renvoie N entiers aléatoires de $[[a; b]]$ dans un tableau 1 ligne \times N colonnes
- `rd.binomial(n,p)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n; p)$
- `rd.binomial(n,p,N)` renvoie N réalisations d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n; p)$ dans un tableau 1 ligne \times N colonnes
- `rd.geometric(p)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$
- `rd.geometric(p,N)` renvoie N réalisations d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ dans un tableau 1 ligne \times N colonnes
- `rd.poisson(lam)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = \text{lam}$
- `rd.poisson(lam,N)` renvoie N réalisations d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = \text{lam}$, dans un tableau 1 ligne \times N colonnes

6. 6.a. Représenter l'histogramme des fréquences de 10000 réalisations indépendantes d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.
6.b. Sur le même graphique, faire apparaître les valeurs des probabilités d'une telle loi.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

⚠ Attention !

Comme pour la commande `range(a,b)`, la borne de droite est exclue !

Aide

Après avoir importé la bibliothèque `math`, la commande `math.comb(n,k)` renvoie la valeur de $\binom{n}{k}$.

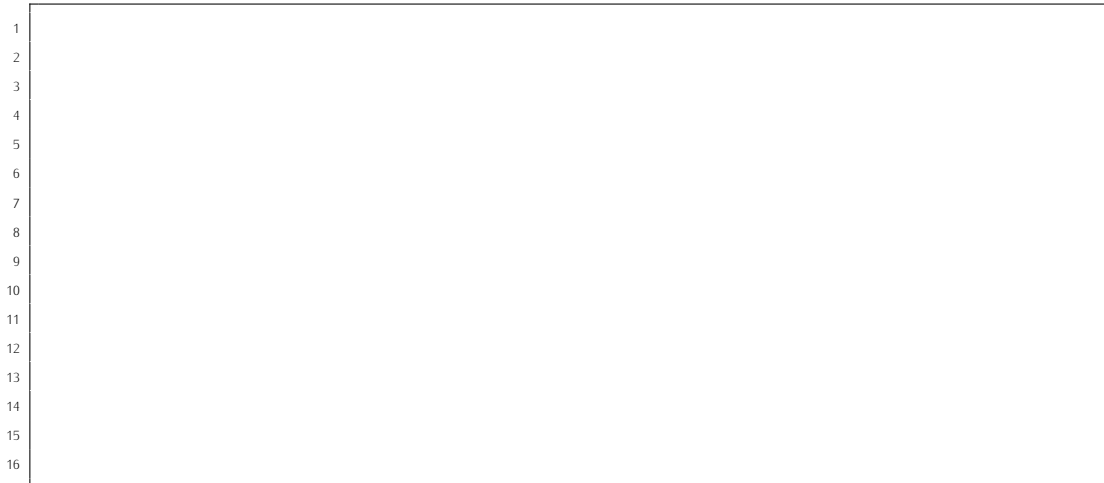
Petite remarque

Le fait que la distribution empirique observée sur un échantillon de grande taille se rapproche de la distribution théorique est assez naturel. Nous le justifierons mathématiquement dans le chapitre 11 !

7. 7.a. Représenter l'histogramme des fréquences de 10000 réalisations indépendantes d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p = 0,5$.
7.b. Sur le même graphique, faire apparaître les valeurs des probabilités d'une telle loi.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

- 8. **8.a.** Représenter l'histogramme des fréquences de 10000 réalisations indépendantes d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
- 8.b.** Sur le même graphique, faire apparaître les valeurs des probabilités d'une telle loi.
- 8.c.** Comparer le graphique obtenu avec celui de la question 6...

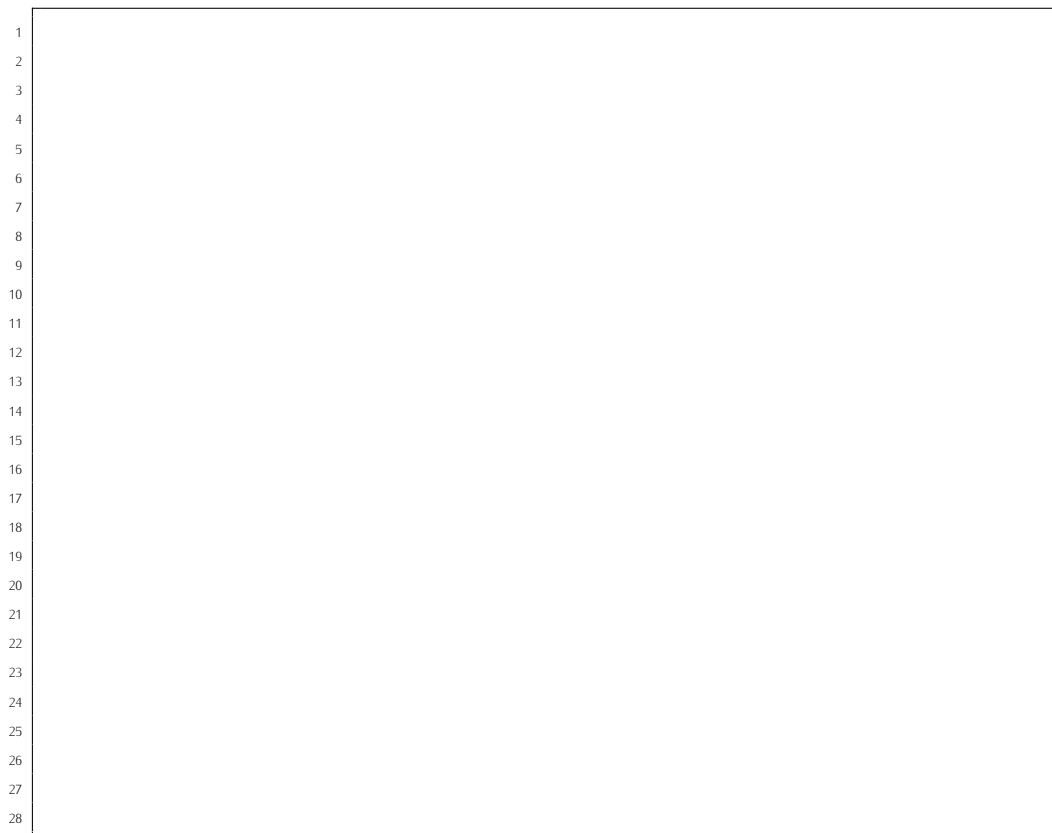


III QUELQUES AUTRES LOIS...

III.1 GÉOMÉTRIQUE TRONQUÉE

On lance successivement et de façon indépendante une pièce donnant PILE avec la probabilité 0,3 jusqu'à obtenir le premier PILE, et on s'arrête dans tous les cas après 10 lancers. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

- 9. **9.a.** Écrire une fonction telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .
- 9.b.** Représenter l'histogramme des fréquences de 10000 réalisations indépendantes de X .



- 9.c.** Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}(X = 10)$ et calculer sa valeur exacte.

III.2 MAXIMUM DE DEUX VA

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. On considère une urne composée de n boules, numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans cette urne. On note X_n la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

10. 10.a. Écrire une fonction telle que l'exécution de `simul_X(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_n .
- 10.b. Écrire un programme permettant d'obtenir une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_5)$.



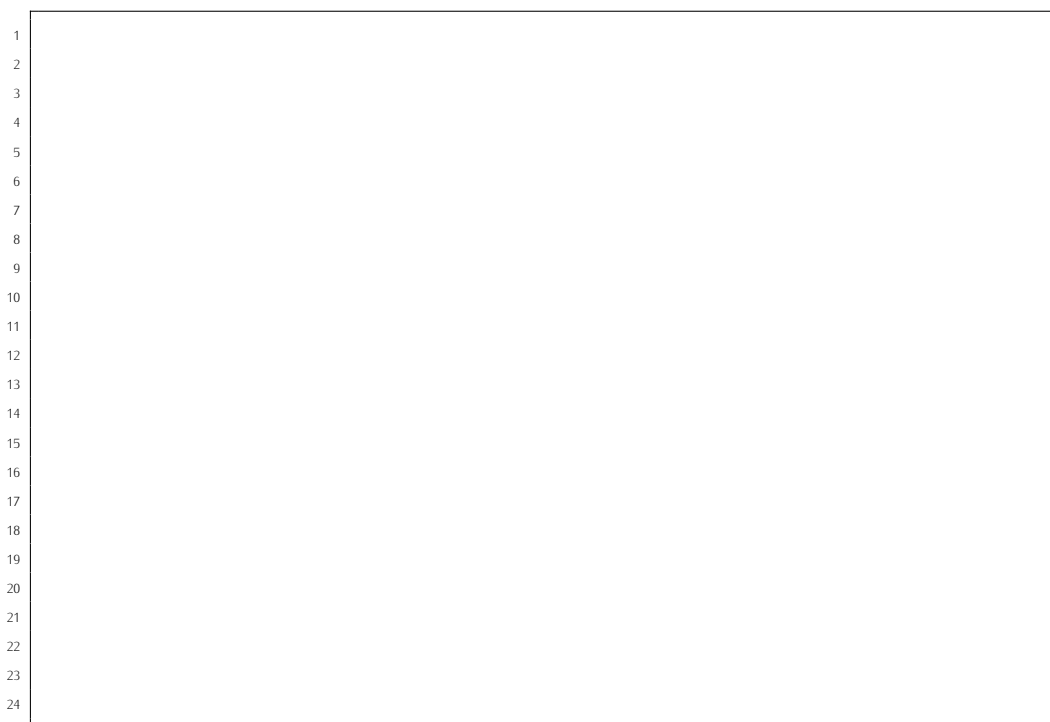
Petite remarque
L'interprétation de la moyenne empirique comme valeur approchée de l'espérance est basée sur la loi faible des grands nombres, que nous verrons dans le chapitre 11.

Pour s'entraîner :
Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.
Si besoin : ECG1A - Chapitre 12 - Exercice 17.

III.3 LOI UNIFORME ?

Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. On dispose d'une urne contenant $(n - 1)$ balles blanches et une balle noire. On effectue des tirages sans remise dans l'urne, jusqu'à l'obtention de la balle noire. On note X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

11. 11.a. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de la commande `simul_X(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_n .
- 11.b. Représenter l'histogramme des fréquences de 10000 réalisations indépendantes de X_n dans les cas $n = 5$, puis $n = 10$.
Que peut-on conjecturer ?



- 11.c. Démontrer cette conjecture.