Grand classique

Comparaison série / intégrale

L'idée est d'utiliser les techniques puissantes sur les intégrales (primitive, IPP, changement de variable), que nous n'avons pas sur les séries, dans le but d'étudier une série.
Plus précisément, une comparaison série / intégrale est utile pour :

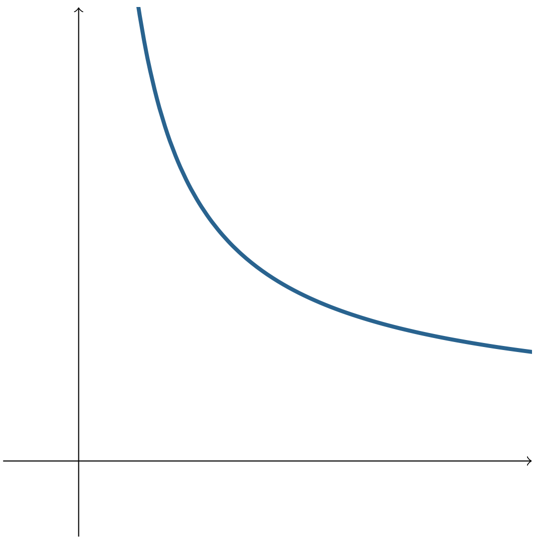
- étudier la nature de la série $\sum_{n \geq a} f(n)$ en se ramenant à la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$,
- déterminer un équivalent de la somme partielle d'une série divergente ou du reste d'une série convergente (avec utilisation du théorème d'encadrement).

★ Classique ! ★
Il est assez fréquent de voir des comparaisons séries / intégrales aux concours.

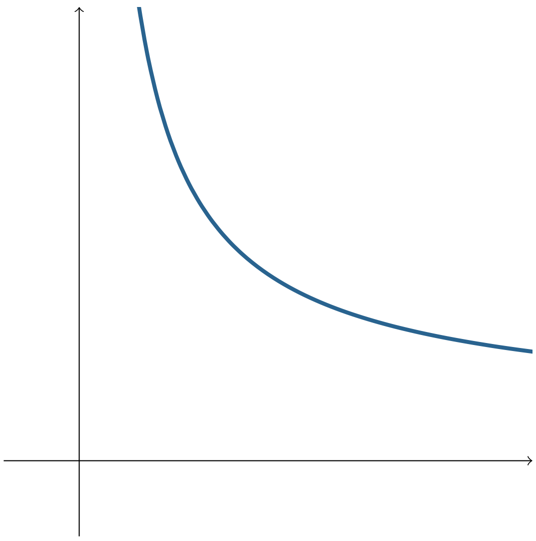
Puisque le théorème de comparaison série / intégrale (qui, lui, fait appel aux intégrales impropres) est hors programme, voyons simplement trois cas classiques d'application, tous basés sur une des deux observations graphiques ci-dessous (qu'il faudra démontrer rigoureusement à chaque fois tout de même).

Important !
Un cas classique a déjà été vu : équivalent de la somme partielle de la série harmonique (QC6).

Considérons une fonction f définie, continue, positive et décroissante sur un certain intervalle.



$$\forall n \in [\ldots],\ f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$$



$$\forall n \in [\ldots],\ \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

♡ Astuce du chef ! ♡
Si tu veux sortir du lot et plaire au correcteur : fais un petit schéma lors de l'obtention d'un tel encadrement !

Un encadrement classique (amorce de comparaison série/intégrale)

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

★ Classique ! ★
Cet encadrement est très classique aux concours. On voit parfois seulement l'inégalité de gauche ou celle de droite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in [n; n+1]$:

$$n \leq x \leq n+1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, donc en particulier sur $[n; n+1]$:

$$\forall x \in [n; n+1],\ \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$$

Petite remarque
On peut aussi débuter le raisonnement par cet encadrement, en mentionnant bien la décroissance de la fonction inverse tout de même.

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $n \leq n+1$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[n; n+1]$) :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{n} \geq \big[\ln(x)\big]_n^{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

Et ainsi :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

Équivalent du reste d'une série de Riemann convergente

On sait que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^2}$ est également convergente. On note ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Objectif : obtenir un équivalent de R_n lorsque $n \to +\infty$.

> **☞ Pour info...** La méthode sert également à étudier la nature des séries de Riemann... C'est un excellent exercice d'entraînement !

1. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On a, pour tout $t \in [k; k+1]$:

$$k \leq t \leq k+1$$

D'où, par décroissance de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_*^+$, donc en particulier sur $[k; k+1]$:

$$\forall t \in [k; k+1], \ \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$$

> **Petite remarque** On peut aussi débuter le raisonnement par cet encadrement, en mentionnant bien la décroissance de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ tout de même.

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $k \leq k+1$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k; k+1]$) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2} dt$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$\forall N \in [\![n+1; +\infty[\![, \ \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

puis :

$$R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq R_n$$

- Soit $N \in [\![n+1; +\infty[\![$. On a établi à la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

En sommant de n à N, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

Or :
  - ◇ par changement d'indice $i = k+1$:

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{i=n+2}^{N+1} \frac{1}{i^2}$$

  - ◇ d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt &= \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{t}\right]_{n+1}^{N+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

- On vient d'établir :

$$\forall N \in [\![n+1;+\infty[\![,\quad \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

  Or :
  - la série $\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^2}$ est une troncature d'une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$) ; par conséquent, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1} \frac{1}{k^2}$ existe et est finie. Il en est de même de $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+2} \frac{1}{k^2}$.
  - par opérations : $\lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{n+1}$

  Le passage à la limite dans l'encadrement est donc légitime et on obtient ainsi :

$$R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq R_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ R_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq R_n$.

3. Conclure que : $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

On vient d'établir à la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq R_n$$

En particulier :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n+1} \leq R_n$
- de $\forall n \in \mathbb{N},\ R_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$, on tire :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ R_m \leq \frac{1}{m}$$

En gros...
C'est un changement d'inconnue $m = n+1$. Attention en revanche : puisque $n \in \mathbb{N}$, on obtient $m \in \mathbb{N}^*$.

On obtient ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

Petite remarque
On peut aller plus vite sur l'obtention de cet encadrement s'il n'est pas demandé de le détailler.

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n}{n+1} \leq nR_n \leq 1$$

Petite remarque
Est-il encore nécessaire de détailler et justifier cette limite ?

Or : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.
Par théorème d'encadrement, on obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} nR_n = 1$$

Par conséquent :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Conclusion : $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Équivalent de la somme partielle d'une série de Bertrand divergente

> ☞ **Pour info...**
> La méthode sert également à étudier la nature des séries $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)^{\alpha}}$, dites séries de Bertrand... C'est également un excellent exercice d'entraînement !

On considère la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ et on note, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Objectif : montrer que la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente et obtenir un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.

1. Établir :

$$\forall k \in [\![3;+\infty[\![, \ \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt$$

- Commençons par démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1;+\infty[$.
  La fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme produit de deux fonctions usuelles dérivables sur $]1;+\infty[$; et cette fonction ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$.
  Par conséquent, f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et, pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\big(\ln(x)+1\big)}{\big(x\ln(x)\big)^2} \\ &= \frac{-1-\ln(x)}{\big(x\ln(x)\big)^2} \end{aligned}$$

  Par conséquent :

$$\forall x \in]1;+\infty[, \ f'(x) < 0$$

  La fonction f est décroissante sur $]1;+\infty[$.
- Soit ensuite $k \in [\![3;+\infty[\![$. Soit $t \in [k-1;k]$. On a :

$$k-1 \leq t \leq k$$

  D'où :

$$t \leq k \leq t+1$$

  Puis, par décroissance de $x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1;+\infty[$ donc en particulier sur $[t;t+1]$ (car $t \geq k-1 \geq 2$), on a :

$$\frac{1}{t\ln(t)} \geq \frac{1}{k\ln(k)} \geq \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)}$$

- On vient donc d'établir :

$$\forall t \in [k-1;k], \ \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)} \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \frac{1}{t\ln(t)}$$

  Ainsi, par croissance de l'intégrale, licite car $k-1 \leq k$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k-1k;]$) :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)}dt \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)}dt \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt$$

  Puis, en effectuant le changement de variable $x = t+1$ dans la première intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt$$

Conclusion : $\forall k \in [\![3;+\infty[\![, \ \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt.$

2. En déduire :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![, \ \frac{1}{2\ln(2)} + \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(3)\big) \leq S_n \leq \frac{1}{2\ln(2)} + \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)$$

puis :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![, \ \frac{1}{2\ln(2)} + \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(3)\big) \leq S_n \leq \frac{1}{2\ln(2)} + \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)$$

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On vient de démontrer :

$$\forall k \in [\![3;+\infty[\![, \ \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt$$

D'où, en sommant de 3 à n :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt$$

Or :

- par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t\ln(t)}dt &= \int_3^{n+1}\frac{1}{t\ln(t)}dt\\ &= \Big[\ln\big(|\ln(t)|\big)\Big]_3^{n+1}\\ &= \Big[\ln\big(\ln(t)\big)\Big]_3^{n+1} \qquad \forall t\geq 3,\ \ln(t)>0\\ &= \ln\big(\ln(n+1)\big)-\ln\big(\ln(3)\big)\end{aligned}$$

Petite remarque

$\dfrac{1}{t\ln(t)}=\dfrac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\ldots$

- de la même façon :

$$\sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t\ln(t)}dt=\ln\big(\ln(n)\big)-\ln\big(\ln(2)\big)$$

- et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}-\frac{1}{2\ln(2)}\\ &= S_n-\frac{1}{2\ln(2)}\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{2\ln(2)}+\ln\big(\ln(n+1)\big)-\ln\big(\ln(3)\big)\leq S_n\leq\frac{1}{2\ln(2)}+\ln\big(\ln(n)\big)-\ln\big(\ln(2)\big)$$

Puis, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ (deux fois), on a :

$$\ln\big(\ln(n)\big)\leq\ln\big(\ln(n+1)\big)$$

D'où le résultat voulu par transitivité.

Conclusion : $\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \dfrac{1}{2\ln(2)}+\ln\big(\ln(n)\big)-\ln\big(\ln(3)\big)\leq S_n\leq\dfrac{1}{2\ln(2)}+\ln\big(\ln(n)\big)-\ln\big(\ln(2)\big)$.

3. Conclure que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\big(\ln(n)\big)$.

On a :

$$\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \ln(n)>\ln(\mathrm{e})=1$$

D'où, par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \ln\big(\ln(n)\big)>0$$

Ainsi, d'après la question précédente, on obtient :

$$\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \frac{\frac{1}{2\ln(2)}-\ln\big(\ln(3)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)}+\frac{\ln\big(\ln(n+1)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)}\leq\frac{S_n}{\ln\big(\ln(n)\big)}\leq\frac{\frac{1}{2\ln(2)}-\ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)}+1$$

Or, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\ln(2)}-\ln\big(\ln(3)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)}+1=1=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\ln(2)}-\ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)}+1$$

Par théorème d'encadrement, on obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln\big(\ln(n)\big)}=1$$

Par conséquent :

$$S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\big(\ln(n)\big)$$

Conclusion : puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\big(\ln(n)\big)=+\infty$, on a également : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.
La série $\sum\limits_{k\geq 2}\dfrac{1}{k\ln(k)}$ est divergente et $S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\big(\ln(n)\big)$.