# Exercices du chapitre 1
## Rappels et compléments sur les suites et séries

### ●○○○ Exercice 1 - Recherche d'équivalents

Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 3n^2 - 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^5 - 3n^2 + 2}{n^8 + n^3 + 1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n^2 + 1)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^n \ln(n) + n^2$
5. $\forall n \in [\![3; +\infty[\![,\ u_n = n \ln\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) - 2$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+1}\big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)$

### ●○○○ Exercice 2 - Une croissance comparée

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

1. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire : $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$.

### ●●○○ Exercice 3 - Suite récurrente d'ordre 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$, définie sur $[-1; +\infty[$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0; 2]$ est stable par $f$.
2. Justifier que si un réel $x$ est point fixe de $f$, alors nécessairement $x \geq 0$. Démontrer que $f$ possède un unique point fixe et le déterminer. On notera $r$ ce point fixe. Vérifier que $r \in [0; 2]$.
3. 3.a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée par 0 et $r$.
   3.b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire ?
   3.c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - r|$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   3.d. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'un entier $N$ tel que $|u_N - r| \leq 10^{-9}$.

### ●○○○ Exercice 4 - Suite récurrente d'ordre 1

Étudier l'existence de la limite et, le cas échéant la déterminer, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

### ●●○○ Exercice 5 - Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + n + 1}$.

1. Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée un entier naturel $n$ et renvoyant la valeur de $u_n$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
3. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n$. En déduire un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
5. 5.a. Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(u_n - \dfrac{1}{n}\right) = -1$.
   5.b. En déduire : $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

### ●○○○ Exercice 6

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{-k}}$.

1. Établir la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $S$ sa limite.
2. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \leq \mathrm{e}^{-n}$.
3. En déduire : $\dfrac{1}{2} \leq S \leq \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$.

## ●●○○ EXERCICE 7 - SUITE D'INTÉGRALES

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} dx$.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.
4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n - \mathrm{e}^{-1}$.
5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n - \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Trouver alors un équivalent simple de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
6. Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée un entier naturel $n$ et renvoyant la valeur de $I_n$.

## ●●○○ EXERCICE 8 - SUITE D'INTÉGRALES

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ et $J_n = nI_n$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.
3. Établir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$.
4. En déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent de $I_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## ●○○○ EXERCICE 9 - CONVERGENCE ET SOMME DE SÉRIES

Justifier la convergence et déterminer les sommes des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{n-1}}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^{2n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$

## ●○○○ EXERCICE 10 - NATURE DE SÉRIES

Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+3n+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n^3-3n+2}{n^4+5n^2+3n+1}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^3+3n+1}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{2^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n+n^2}$
11. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$
12. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$

## ●●○○ EXERCICE 11 - VRAI OU FAUX ?

1. Si deux suites ont même limite, alors elles sont équivalentes.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, alors les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ ont même nature.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs tels que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\sum v_n$ également.
4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs tels que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Si $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum u_n$ également.
5. Si $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
7. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{2}{n}$, alors il existe un réel $a \in [1;2]$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$.

## ●●○○ Exercice 12 - ESC 2001 E

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. Donner le tableau de variations de $f^{-1}$.
2. Vérifier qu'il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté $\alpha$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \in ]0;1]$.
4. 4.a. Montrer que pour tout réel $x$ de $[0;1]$, $f(x) - x \geq 0$ ; et qu'il y a égalité seulement pour $x = 0$.
   4.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   4.c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser la valeur de sa limite.
5. On se propose de déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   5.a. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$.
   5.b. Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.
   5.c. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. On note $S$ sa somme. Établir : $\alpha \leq S \leq 2$.
   5.d. Démontrer finalement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-S}}{2^n}$.

## ●●○○ Exercice 13 - EDHEC 2016 E

Pour chaque entier naturel $n$, on définit la fonction $f_n$ par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. Étude de $f_n$.
   1.a. Montrer que $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout $x$ de $[n, +\infty[$.
   Donner le sens de variation de $f_n$.
   1.b. En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
   1.c. En déduire que pour chaque entier naturel $n$, il existe un unique réel, noté $u_n$, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Étude de la suite $(u_n)$.
   2.a. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   2.b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. Écrire un programme dont l'exécution affiche un entier naturel $n$ pour lequel $u_n - n \leq 10^{-4}$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$.
   4.a. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   4.b. Établir que, pour tout réel $x$ supérieur ou égal à $-1$, on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.
   4.c. Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
   4.d. Déduire de l'encadrement obtenu en 2.b. que : $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

## ●●○○ Exercice 14 - EML 2019 E

On considère la fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in ]0, +\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}$$

### Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant les limites en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

On note $g : [2, +\infty[ \to [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de $f$ à $[1, +\infty[$.

3. 3.a. Dresser le tableau de variations de $g$.
   3.b. Justifier que la fonction $g$ est dérivable sur $]2, +\infty[$.
   3.c. Soit $y \in [2, +\infty[$. Déterminer une expression de $g(y)$ en fonction de $y$.

## PARTIE B : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n)$$

4. Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $u_n$ existe et $u_n \geq 1$.
5. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul $n$ et renvoyant en sortie la valeur de$u_n$.
6. On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   - 6.a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.
   - 6.b. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$.
   - 6.c. Calculer, pour tout $n$ supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.
     En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
7. 
   - 7.a. Montrer que, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,dt$.
   - 7.b. Pour tous entiers $n$ et $p$ tels que $2 \leq p < n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire : $0 \leq u_n - u_p \leq \displaystyle\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt$.
   - 7.c. En déduire, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
     Montrer alors que $\ell$ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.
   - 7.d. Montrer, pour tout entier $p$ supérieur ou égal à 2 :
     $$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$$
   - 7.e. En déduire une fonction **Python** qui renvoie une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-4}$ près.

## ●●○○ Exercice 15 - ESC 2006 E

On considère la fonction $g$ définie ur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x - x$.

1. Dresser le tableau de variations de $g$ en précisant ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions, l'une strictement négative notée $\alpha_n$ et l'autre strictement positive notée $\beta_n$.
3. **Approximation de $\alpha_2$.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \end{cases}$.
   - 3.a. Établir : $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.
   - 3.b. Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$ puis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_2 \leq u_n \leq -1$.
   - 3.c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, démontrer que pour tous réels $a, b$ tels que $a \leq\ b \leq\ -1$, on a : $0 \leq e^b - e^a \leq \dfrac{1}{e}(b-a)$.
   - 3.d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha_2 = e^{u_n} - e^{\alpha_2}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.
   - 3.e. Démontrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha_2$.
   - 3.f. Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir une valeur approchée de $\alpha_2$ à $10^{-5}$ près.
4. **Étude des suites $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ et $(\beta_n)_{n\geq 2}$.**
   - 4.a. Étudier les variations des suites $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ et $(\beta_n)_{n\geq 2}$ et déterminer leur limite en $+\infty$.
   - 4.b. Établir : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ -n \leq \alpha_n \leq -n+1$. En déduire un équivalent de $\alpha_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   - 4.c. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Démontrer : $1 \leq g\big(\ln(n)\big) \leq n$. En déduire : $g\big(\ln(2n)\big) \geq n$.
   - 4.d. En déduire : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$ puis déterminer un équivalent simple de $\beta_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## ●●○○ Exercice 16 - EDHEC 1997 E

Soit $p$ un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{p}}$.

1. Montrer que si $p \in \{0; 1\}$, alors la série de terme général $u_n$ diverge.

Dans la suite, on suppose que $p \geq 2$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

2. 
   - 2.a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n$.
   - 2.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 1 + \dfrac{1}{p-1}\big(1 - (n+p+1)u_{n+1}\big)$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (n+p)u_n$.
   - 3.a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - 3.b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$ positif ou nul.

3.c. Montrer que la série de terme général $u_n$ converge et donner sa somme fonction de $p$ et $\ell$.

4. On suppose, dans cette question seulement, que $\ell \neq 0$.

4.a. Établir : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n}$.

4.b. En déduire une contradiction avec la question 3..

5. Conclure sur la valeur de $\ell$ et exprimer simplement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en fonction de $p$.

## ●●○○ Exercice 17 - EDHEC 1997 E

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. 1.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations complet de $f_n$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

1.b. En déduire, lorsque $n \in [\![3;+\infty[\![$, l'existence de deux réels $u_n$ et $v_n$ solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ tels que $0 < u_n < n < v_n$.

2. A l'aide de la méthode de dichotomie, écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, l'exécution de **approx_u(n)** renvoie une valeur approchée de $u_n$ à $10^{-3}$ près.

3. Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.

3.a. Montrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $1 < u_n < \mathrm{e}$.

3.b. Montrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

3.c. En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3.d. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. En déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4. Étude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$.

4.a. Justifier que la suite $(v_n)_{n\geq 3}$ diverge vers $+\infty$.

4.b. Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Calculer $f_n\big(n\ln(n)\big)$ puis montrer que $n\ln(n) < v_n$.

4.c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 2\ln(n)$.

4.d. En déduire : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.

4.e. Montrer enfin : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

## ●●○○ Exercice 18 - EDHEC 1998 E

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

1. **Résultats sur la fonction $f$.**

1.a. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

1.b. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq x$, l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 0$.

1.c. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt$$

1.d. En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$ puis pour $n = 3$, établir l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

2. **Étude d'une suite.**

2.a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

2.b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 1.

2.c. A l'aide des la question 1.b., montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis préciser sa limite.

2.d. En déduire la nature de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

2.e. En utilisant la question 1.d., démontrer : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$.

2.f. Conclure quant à la nature de la série de terme général $u_n^2$.

3. **Étude d'une fonction définie par une intégrale.**

On note $\phi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\phi(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

On note également $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \phi(t)dt$.

3.a. Montrer que $\phi$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3.b. Vérifier que $g$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

3.c. 3.c.i. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ 1 - \dfrac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.

3.c.ii. En déduire que $g$ est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

3.d. 3.d.i. Établir : $\forall x \in ]1;+\infty[,\ \displaystyle\int_1^x \phi(t)dt \leq \ln(x)$.

3.d.ii. En déduire que $g$ possède une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

3.e. 3.e.i. Pour tout réel strictement positif $x$, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

3.e.ii. Dresser le tableau de variations de $g$ et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

## ●●○○ Exercice 19 - TSSA et série alternée

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n$.

   1.a. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

   1.b. Démontrer que les suites $(S_{2N})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   1.c. En déduire que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.

2. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

3. Donner un équivalent simple de $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Établir :
$$\frac{1}{1+u_n} = 1 - u_n + u_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2)$$
En déduire :
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

5. Étudier alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

6. Qu'a permis de mettre en évidence cet exercice ?

## ●●○○ Exercice 20 - Comparaison série / intégrale

Soit $\alpha \in ]0;1[$.

1. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^\alpha}$ ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

   2.a. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{1-\alpha} - \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq S_n$$

   2.b. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

## ●●○○ Exercice 21 - Type oral

1. Critères de comparaison sur les séries à terme général positif.

2. Soit $x \in [0;+\infty[$. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k+x}$. On notera $f(x)$ sa somme.

3. Calculer $f(0)$.

4. Étudier les variations de la fonction $f$ ainsi définie sur $[0;+\infty[$.

5. Établir : $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2x+1}$.

6. Déduire des deux questions précédentes que $f$ possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.

7. 7.a. Montrer que pour tous réels positifs $x$ et $y$, on a : $|f(x)-f(y)| \leq \dfrac{4}{3}|x-y|$.

   7.b. En déduire que $f$ est continue sur $[0;+\infty[$.