1

Analyse

Équivalence et négligeabilité de suites

Introduction...

Lorsque l'on parle de *comportement asymptotique* d'une suite, la première idée à avoir est l'étude de l'existence et, le cas échéant, la recherche de la limite de cette suite. Il s'agit en effet du premier élément à étudier. Mais ce qui nous intéresse ensuite, c'est la *vitesse* à laquelle la suite tend vers cette limite. Autant il semble relativement simple de répondre à cette question dans le cas des suites dont on connaît le terme général ; autant cela sera nettement plus délicat pour les suites récurrentes ou les suites implicites.
L'idéal quand on souhaite étudier précisément une suite est d'en obtenir un *développement asymptotique* : en gros, une somme de suites simples ayant des comportements de plus en plus précis, dont la suite étudiée serait très proche. Cette notion n'est pas au programme, même si nous pourrons rencontrer des recherches de tels développements en exercices. Nous nous limiterons donc bien souvent au premier terme de ce développement asymptotique : un *équivalent* de la suite.

L'objectif de ce chapitre est d'affiner l'étude du comportement asymptotique des suites en voyant deux notions qui seront essentiellement illustrées sur des suites dont le terme général est connu, puis d'en voir une application dans l'étude des séries. Dans les cas où le terme général de la suite étudiée n'est pas connu, l'exercice guidera.

Pour bien démarrer...

1 # Qu'est-ce qu'une suite ?

2 # Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?

3 # Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.

4 # Définition de suites adjacentes. Conséquence ?

5 # Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence d'une série. Est-elle suffisante ?

6 # Critère de comparaison sur les séries à terme général positif.

7 # Séries usuelles.

8 # Convergence absolue d'une série. Lien avec la convergence.

9 # A revoir :

- détermination des termes généraux des SA, SG, SAG, SRL2,
- étude des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$,
- étude des suites implicites,
- étude des suites d'intégrales.

Dans tout le chapitre, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront des suites définies sur $\mathbb{N}$.
Tous les résultats du chapitre sont encore valables si les suites en jeu ne sont définies qu'à partir d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

I Négligeabilité de suites

Définition 1 – Négligeabilité de suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
On dit que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$** lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Petite remarque — On peut aussi dire que u_n est négligeable devant v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

☞ Pour info... — En fait, on peut donner une définition plus générale (sans la condition sur (v_n)) : (u_n) est négligeable devant (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n\varepsilon_n$.

Exemples 1

- **E1** n est négligeable devant n^2 quand n tend vers $+\infty$.
- **E2** $\dfrac{1}{n^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.
- **E3** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Un peu d'histoire — Edmund Landau (1877-1938, allemand) a concentré son travail sur la théorie des nombres ; il a, entre autres, fourni une démonstration du théorème des nombres premiers plus simple que celles alors connues. Il a également popularisé les notations o et $\sim$ vues dans ce chapitre.

Notations – de Landau

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

N1# On note $\underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

N2# Par abus, on écrira $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
On lira "u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$".

Petite remarque — Dans l'écriture "$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$", le n est muet.

En gros... — "Être négligeable devant" signifie "être très petit devant", comme en français !

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$:
   Dans ce cas, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si ....
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$:
   Dans ce cas, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si ....
3. $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ si, et seulement si ....

Propriétés 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cinq suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

P1# $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ *(linéarité)*

P2# $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ *(transitivité)*

P3# $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Longrightarrow u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)$

P4# $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v'_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n v'_n)$

P5# $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\lambda v_n)$

⋆ Démonstration :

$\star$

EXEMPLES 2

E1 On a : $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$, $n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$ et $1 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$. D'où : $n^2+2n+1 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$.

E2 $n^4+n^2+2n+1+\underset{n\to+\infty}{o}(n^3) = n^4+\underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$.

En effet, puisque n^2+2n+1 est négligeable devant n^3 en $+\infty$, l'expression $n^4+n^2+2n+1+\underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ est en fait égale à n^4 + la somme de deux quantités négligeables devant n^3 en $+\infty$. Par conséquent, on a l'égalité énoncée...

E3 On sait que $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$, donc : $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

E4 On sait que $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$ et $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc : $\ln(n)\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

E5 On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_*^+,\ \ln(n)^a \underset{n\to+\infty}{=} o(n^b)$$

$$\forall b\in\mathbb{R}_*^+, \forall q\ \in]1;+\infty[,\ n^b \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$$

$$\forall q\in]1;+\infty[,\ q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$$

$$n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$$

On les retient parfois ainsi :

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_*^+,\ \forall q\in]1;+\infty[,\ \ln(n)^a \ll n^b \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

✘ Attention !

On rappelle que "$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$" est un abus de notation : $\underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ n'est pas une quantité que l'on peut additionner ou soustraire. En fait, "$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$" n'est pas une égalité comme on la connait. En particulier :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \end{array}\right\} \not\Longrightarrow u_n = u'_n$$

Vocabulaire

Le symbole "$\ll$" se lisant alors "est négligeable devant".

Parfois, on écrira $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ qui se lit "u_n égale v_n + un petit o de w_n". Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une suite (h_n), négligeable devant (w_n), telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = v_n + h_n$.

II Équivalence de suites

Définition 2 - Suites équivalentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
On dit que **les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes en $+\infty$** lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Dans ce cas, on écrira : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Petite remarque
On peut aussi dire que u_n est équivalent à v_n quand n tend vers $+\infty$.

☞ Pour info...
En fait, on peut donner une définition plus générale (sans la condition sur (v_n)) :
(u_n) est équivalente à (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + v_n\varepsilon_n$.
Autrement dit :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

Exemples 3

E1 $n^2 + 2n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$

E2 $\sqrt{2n^2 - 5n + 2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}n$

E3 $e^n + n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$

E4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leq u_n \leq 2n$. Donner un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

★ Classique ! ★
Il est fréquent d'obtenir un équivalent à l'aide d'un encadrement...

Trouver une suite (v_n) équivalente à (u_n) en $+\infty$ c'est trouver une suite qui a le même comportement que (u_n) au voisinage de $+\infty$. Le but étant de trouver une suite (v_n) dont l'expression est plus simple que celle de (u_n)...

Propriétés 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1# $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ *(réflexivité)*

P2# $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ *(symétrie)*

P3# $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ *(transitivité)*

P4# Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors, à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même signe.

P5# $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}) \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

P6# $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R}) \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$

P7# $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{array}\right\} \implies u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n v'_n$ *(compatibilité avec le produit)*

P8# $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{array}\right\} \implies \dfrac{u_n}{u'_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{v'_n}$ *(compatibilité avec le quotient)*

P9# $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (u_n) \text{ est strictement positive à} \\ \text{partir d'un certain rang} \end{array}\right\} \implies \forall a \in \mathbb{R},\ u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a$ *(compatibilité avec la puissance)*

P10# $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$ *(compatibilité avec la valeur absolue)*

☞ Pour info...
Une relation entre deux objets d'un même ensemble qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive est appelée **relation d'équivalence.**
C'est le cas de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ sur l'ensemble des suites réelles ; mais également le cas de $\iff$ sur l'ensemble des assertions mathématiques.

Petite remarque
En particulier :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$$

$\star$ Démonstration :

⋆

Exemples 4

E1 Donnons un équivalent simple de $n^3 2^n + n3^n$ en $+\infty$.

E2 Déterminons la limite de la suite de terme général $\dfrac{(5n^2+1)^2 - n^2 + 3}{3n^4+7}$.

E3 On sait que :

$$n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad ; \quad n + \mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Ainsi, par symétrie et transitivité :

$$n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n + \mathrm{e}^{-n}$$

On a aussi trivialement :

$$-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$$

Ainsi, **si on pouvait sommer les équivalents**, on obtiendrait :

$$\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n} \quad : \quad \text{FAUX !}$$

Conclusion : ....

E4 Les suites $\big(\ln(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

E5 Les suites $\big(\exp(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\exp(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

À retenir...
Exemple classique pour justifier que, de façon générale, on ne compose pas les équivalents !

Conclusion : ....

Trois choses importantes sur les équivalents :

1. Il est interdit de sommer des équivalents !
2. Il est interdit d'appliquer une fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence !
3. Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa ! D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ n'est pas permise... D'autre part, la seule suite équivalente à la suite nulle est la suite nulle...

Théorème 1 – Équivalents usuels

T1# Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_k$ des réels. Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^k$.

T2# Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R}^*,\ (1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n$$

Autrement dit : Une expression polynomiale est équivalente, en $+\infty$, à son terme non nul de pus haut degré.

⋆ Démonstration :

☞ Rappels...

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} =$
- $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} =$

Méthode pour retrouver ces limites :

⋆

Exemple 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

★ Classique ! ★ Tellement classique... En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

III Application à l'étude des séries

> **Important !**
> Si le terme général est négatif, il suffit de le multiplier par -1 et se ramener aux critères qui suivent.
> En fait, le problème est seulement si le terme général n'est jamais de signe constant !

Voyons trois critères pour étudier la nature de séries à terme général positif (à partir d'un certain rang).

Théorème 2 - Critère de comparaison sur les séries à terme général positif

T1# $\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum v_n \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum u_n \text{ est convergente}\right)$

T2# $\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum u_n \text{ est divergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum v_n \text{ est divergente}\right)$

Démonstration : C'est QC4 !

On en déduit le suivant :

Théorème 3 - Critère de négligeabilité sur les séries à terme général positif

T1# $\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \sum v_n \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum u_n \text{ est convergente}\right)$

T2# $\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \sum u_n \text{ est divergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum v_n \text{ est divergente}\right)$

> **★ Classique ! ★**
> On utilise souvent le premier point dans le cas où $\sum v_n$ est une série de Riemann convergente.
> Autrement dit, si (u_n) est à termes positifs et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors on pourra conclure sur la convergence de $\sum u_n$.

Démonstration :

Qui entraîne le dernier :

Théorème 4 - Critère d'équivalence sur les séries à terme général positif

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ ont même nature}\right)$$

♡ Astuce du chef ! ♡

En fait, puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il suffit que (v_n) soit à termes positifs pour que (u_n) le soit à partir d'un certain rang...

⋆ Démonstration :

Petite remarque

Le début de la démonstration pourrait être analogue à celle du théorème précédent. En effet, si $\frac{u_n}{v_n} \to 1$, alors il existe un rang à partir duquel $\frac{u_n}{v_n} \leq 2$, et donc (car $v_n \geq 0$) : $u_n \leq 2v_n$. On applique ensuite le critère de comparaison sur les séries à terme général positif pour conclure que si $\sum v_n$ CV, alors $\sum u_n$ CV.

⋆

♣ Méthode 1 ♣

1. **Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:**
   - si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente ;
   - on regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles ;
   - sinon :
     - ◇ si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple),
     - ◇ si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent,
     - ◇ si les termes de $\sum u_n$ sont alternés :
       - ⇝ on peut étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ CV, alors $\sum u_n$ CV. Si $\sum |u_n|$ DV, alors on ne peut pas conclure,
       - ⇝ on peut revenir à la suite (S_n) des sommes partielles et étudier sa nature par théorème de recouvrement (les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont-elles adjacentes ?),
       - ⇝ on regarde si l'on peut mettre en place un télescopage.
2. **Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :**
   - on regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles ;
   - on regarde si l'on peut mettre en place un télescopage.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes ou s'il met en place une comparaison série / intégrale par exemple (comme dans QC6)...

Petite remarque

Les critères sont encore valables si les suites (u_n) et (v_n) ne sont à termes positifs *qu'à partir d'un certain rang.*

☞ Rappel...

Parfois utile : **la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.** A savoir redémontrer rapidement tout de même...

Exemples 6

Déterminer la nature des séries suivantes :

E1 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$

E2 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$

E3 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

E4 $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

E5 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$

E6 $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

E7 $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$