6

Fonctions

Limites de fonctions

Introduction...

La notion de limite (historiquement introduite par l'étude des suites et des séries) a nécessité un travail conséquent et a suscité d'importants débats au sein de la communauté mathématique... On pouvait déjà voir, autour du III$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus-Christ : "*Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées*."

Nous sommes au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle quand D'Alembert, Leibniz et Euler tentent une définition formelle de la notion de limite. Le calcul différentiel a déjà débuté, en lien avec l'astronomie et la mécanique, et les termes "infiniment petit", "infiniment grand", "infinitésimal" sont souvent utilisés de façon intuitive (via une approche visuelle ou géométrique) mais peu rigoureuse.
Le développement de l'analyse entraîne une volonté de rigueur mathématique sans précédent. Les récents travaux sur la géométrie prouvent qu'il n'est pas possible de construire les mathématiques sur une approche géométrique et intuitive. Par la suite, Cauchy donnera, au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, une définition plutôt satisfaisante de la limite ; mais la difficulté est ailleurs à cette époque : la définition même de l'ensemble des réels est imprécise et ne permet pas une définition parfaitement rigoureuse et unanime de limite. Quelques décennies plus tard, après le travail de Bernhard Bolzano (1781-1848, tchèque) resté dans l'ombre, les travaux de Karl Weierstrass (1815-18897, allemand) mettent le point final à la construction de $\mathbb{R}$ et fournissent ainsi une définition rigoureuse de continuité d'une fonction et de la limite, à l'aide des fameux epsilon (cette définition est sensiblement celle utilisée actuellement).

Définition de limite par Cauchy : "*Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres*.".

Pour bien démarrer...

1 # Rappeler les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les formules de dérivation.

2 # L'inverse de 0 existe-t-il ?

3 # Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre $0 < \dfrac{1}{x^2} \leq \varepsilon$ d'inconnue $x > 0$.

4 # Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre $0 < e^x \leq \varepsilon$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5 # Soit $M > 0$. Résoudre l'inéquation $\ln(x) > M$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$.

6 # Représenter les courbes des fonctions usuelles.

I Limites en un réel

Dans cette partie, I désigne un intervalle borné de $\mathbb{R}$, x_0 est un réel de I ou une extrémité de I et f une fonction définie sur I (sauf éventuellement en x_0 (sera précisé dans les énoncés)).

Petite remarque
Tout peut être étendu dans le cas où $x_0 \in \mathrm{I}$ et f n'est pas définie en x_0, il faut juste adapter légèrement les écritures (écrire $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ au lieu de I en gros)...

I.1 Limite finie en un réel

Définitions 1 - Limite finie en un réel

D1# Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f **a ℓ pour limite en x_0** (ou que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in \mathrm{I},\ \Big(x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\Big)$$

D2# On dit que f **a une limite finie en x_0** lorsqu'il existe un réel ℓ qui est limite de f en x_0.

D3# On dit que f **a ℓ pour limite à gauche en x_0** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in \mathrm{I},\ \Big(x \in [x_0 - \delta; x_0[\Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\Big)$$

D4# On dit que f **a ℓ pour limite à droite en x_0** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in \mathrm{I},\ \Big(x \in]x_0; x_0 + \delta] \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\Big)$$

En gros...
f tend vers ℓ en x_0 lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ quitte à choisir un x suffisamment proche de x_0.

Propriété 1 - Unicité de la limite

Si f a une limite finie en x_0, elle n'en a qu'une seule.

★ Démonstration :

Idée de la démonstration
Supposons que f possède deux limites ℓ_1 et ℓ_2 en x_0, traduisons cela avec l'écriture quantifiée puis cherchons à obtenir que $\ell_1 = \ell_2$...
Nous utiliserons le résultat démontré dans lexercice 14 du chapitre 0 !

★

✎ Notation
Le résultat et la démonstration sont encore valables dans le cas d'une limite latérale (gauche ou droite)...
On peut alors sans problème définir les notations suivantes :
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou parfois : $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ pour signifier que la limite de f en x_0 est ℓ
- limite à gauche : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$
- limite à droite : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Avec cette définition, on a immédiatement que si f possède une limite en x_0 et que $f(x_0)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (et donc f est continue [1]) : c'est le cas où tout se passe bien dans le meilleur des mondes.

[1] Nous verrons cela dans le chapitre 13.

Propriétés 2 - Lien entre les différentes limites

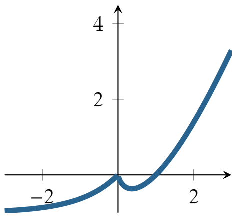
P1# Si $x_0 \in \mathrm{I}$ et que $f(x_0)$ existe, alors :

"f a une limite en x_0" $\Longleftrightarrow$ "f a une limite à gauche **et** une limite à droite en x_0 **et qu'elles sont égales à $f(x_0)$**".

P2# Si $x_0 \in \mathrm{I}$ et si f n'est pas définie en x_0, alors :

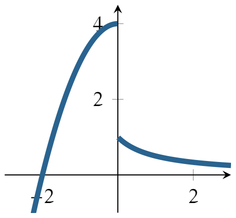
"f a une limite en x_0" $\Longleftrightarrow$ "f a une limite à gauche **et** une limite à droite en x_0 **et qu'elles sont égales**".

limites à gauche et à droite finies et égales



ici, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

limites à gauche et à droite finies et différentes



ici, f n'a pas de limite en 0

Petite remarque Dans le premier cas, on ne voit même pas que f n'est pas définie en 0... Nous reverrons ce cas plus tard dans l'année !

Exemples 1

E1 $\lim_{x \to -2} x^2 =$

E2 $\lim_{x \to 0} e^x =$

E3 Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$.
La fonction f est définie sur . En revanche, pour tout $x \neq 1$, $f(x) =$
Par conséquent, on obtient : $\lim_{x \to 1} f(x) =$

E4 Soit $m \in \mathbb{Z}$. On a : $\lim_{\substack{x \to m \\ x < m}} \lfloor x \rfloor =$ et $\lim_{\substack{x \to m \\ x > m}} \lfloor x \rfloor =$

E5 **Étudions les limites à gauche et à droite en 2 de la fonction** $f : x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ -x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

E6 **Étudions les limites à gauche et à droite en −1 de la fonction** $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

Petite remarque On ne démontrera pas ces résultats avec la définition quantifiée : gardons cela pour la suite du cours...

★ Classique ! ★ Si f est définie en deux morceaux, on devra étudier séparément limites à gauche et à droite.

I.2 Limite infinie en un réel

Définition 2 - Limite infinie en un réel

On dit que f **a $+\infty$ pour limite en x_0** lorsque :

$$\forall M > 0, \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I, \ \left(x \in [x_0 - \delta ; x_0 + \delta] \Longrightarrow f(x) \geq M \right)$$

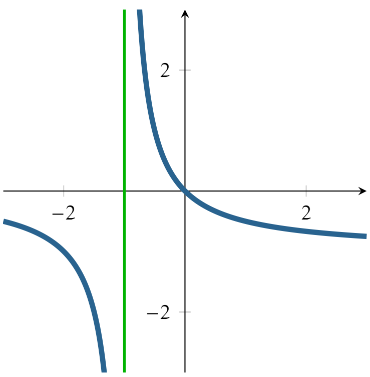
En gros... f tend vers $+\infty$ en x_0 lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut quitte à choisir un x suffisamment proche de x_0.

Remarques

R 1. Là encore, il y a unicité et on note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

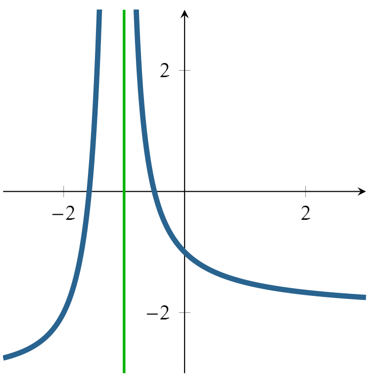
R 2. Bien entendu, une définition analogue existe pour une limite égale à $-\infty$... Et aussi pour des limites infinies à gauche et à droite de x_0.

limites à gauche et à droite infinies et différentes



ici, f n'a pas de limite en −1

limites à gauche et à droite infinies et égales



ici, $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

Vocabulaire Dans les deux cas, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote** ("verticale") à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de x_0.

Exemples 2

E1 Démontrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$; et la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe de la fonction inverse au voisinage de 0.

E2 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} =$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} =$

Par conséquent, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ a une limite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$

La droite d'équation est asymptote à la courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0.

E3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) =$

La droite d'équation est asymptote à la courbe de la fonction ln au voisinage de 0.

II Limite en l'infini

Dans cette partie, I est un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et f une fonction définie sur I.

II.1 Limite finie en l'infini

Définition 3 - Limite finie en l'infini

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f **a ℓ pour limite en $+\infty$** lorsque :

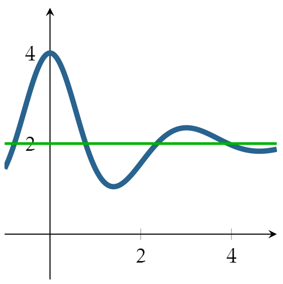
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ \left(x \geq A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\right)$$

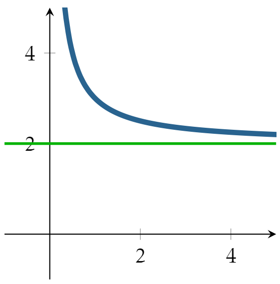
En gros...
f tend vers ℓ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ quitte à choisir un x suffisamment grand.

Remarques

R 1. Là encore, il y a unicité et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

R 2. Bien entendu, une définition analogue existe pour une limite finie en $-\infty$...





Vocabulaire
Dans les deux cas, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote** ("horizontale") à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Exemples 3

E1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$

La droite d'équation est asymptote à la courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ au voisinage de $\pm\infty$.

E2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 =$

La droite d'équation est asymptote à la courbe de la fonction $x \longmapsto e^x$ au voisinage de $-\infty$.

II.2 Limite infinie en l'infini

Définition 4 - Limite infinie en l'infini

On dit que f **a $+\infty$ pour limite en $+\infty$** lorsque :

$$\forall M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ \left(x \geq A \Longrightarrow f(x) \geq M\right)$$

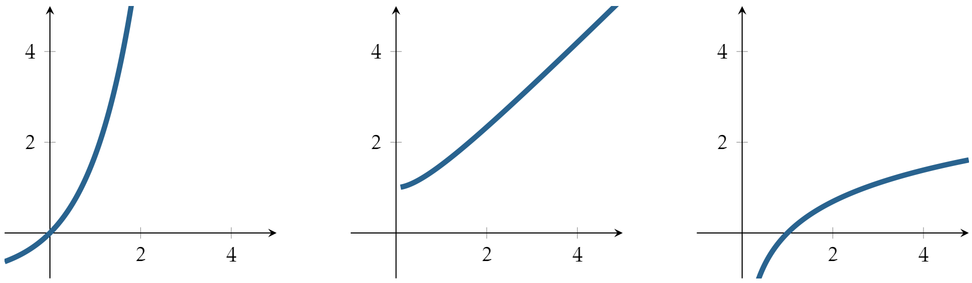
En gros...

f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut quitte à choisir un x suffisamment grand.

Remarques

R 1. Là encore, il y a unicité et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

R 2. On définit de manière analogue : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.



Petite remarque

Il existe, là encore, une notion d'asymptote... En revanche, il n'y pas toujours de droite asymptote à une courbe en $\pm\infty$ dans ce cas ! Par exemple, la première courbe n'a pas de droite asymptote en $+\infty$, alors que c'est le cas de la seconde. Nous étudierons cela plus précisément en exercice...

Exemples 4

Tous les résultats ci-dessous doivent être parfaitement connus :

E1 $\lim\limits_{x \to -\infty} x =$

E2 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 =$

E3 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$

E4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$

E5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) =$

✘ Attention !

Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$:

III Limites usuelles & opérations sur les limites

Propriétés 3 - Limites usuelles

P1# Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est un entier pair, alors :

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n = +\infty$$

- Si n est un entier impair, alors :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

P2#

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

P3#

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

P4# Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_*^+$ à l'aide de l'égalité : $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$... Et on a :

- Si $\alpha > 0$, alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$$

- Si $\alpha < 0$, alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$$

♡ Astuce du chef ! ♡

Bien connaître les courbes des fonctions usuelles permet de retrouver les limites.

✘ Attention !

On fait attention aux signes...

★ Démonstration : Tout peut se démontrer en revenant aux définitions quantifiées des limites... ★

Voyons maintenant le comportement des limites avec les opérations sur les fonctions (addition, multiplication, division, composition). Nous ne démontrerons aucun des résultats, même si tout pourrait se faire en revenant à la définition quantifiée des limites.

Propriétés 4 - Opérations sur les limites

P1# Pour la somme (les 9 cases donnent les limites de $f+g$) :

limite de g \ limite de f	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

P2# Pour le produit (les 16 cases donnent les limites de $f \times g$) :

limite de g \ limite de f	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

P3# Pour le quotient (les 16 cases donnent les limites de $\dfrac{f}{g}$) :

limite de g \ limite de f	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	FI	FI

P4# Soient a, b et c des nombres réels ou $\pm\infty$. Soient g et h deux fonctions telles que $g \circ h$ est bien définie au voisinage de a. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{a} h = b \\ \lim\limits_{b} g = c\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{a} g \circ h = c$$

Vocabulaire
"FI" signifie "Forme Indéterminée".

Petite remarque
Les cases dans lesquelles figurent des $\pm\infty$ sont des cas où la limite peut être $+\infty$ ou $-\infty$: pour savoir, il suffit d'utiliser les règles de signe bien connues.

Petite remarque
Les deux premiers tableaux sont symétriques (car $f+g = g+f$ et $f \times g = g \times f$), mais pas le dernier (en effet, $\frac{f}{g} \neq \frac{g}{f}$).

Petite remarque
Ce résultat est assez intuitif en fait : il faut étudier la limite de la deuxième fonction à l'endroit où arrive la première...

Garder en tête que, globalement, la limite se comporte plutôt pas mal avec les opérations élémentaires... et se souvenir de "l'égalité" : $\dfrac{1}{\infty} = 0$ qui est équivalente à $\dfrac{1}{0} = \infty$; tout en pensant aux règles de signes !

Les **formes indéterminées** sont les cas : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$. C'est à dire que lorsque nous sommes confrontés à ces cas là, le résultat ne peut être prédit ; la limite peut être 0, $\pm\infty$, ou encore 1, 43... Tout est possible !

✍ Rédaction
On sait qu'il ne faut jamais écrire $\frac{1}{0}$ ou $\frac{1}{\infty}$ sur une copie !

✘ Attention !
Il y a en fait deux autres FI : 1^{∞} et 0^0. Mais si vous les rencontrez, c'est que vous n'avez pas eu le bon RÉFLEXE dans l'étude d'une fonction dont la variable est en exposant...

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer la limite d'une fonction :**

- déterminer la limite de chacune des expressions apparaissant dans l'expression de $f(x)$
- s'il n'y a pas de forme indéterminée, conclure en utilisant les règles opératoires (distinguer éventuellement limite à droite et à gauche en fonction des signes) ; sinon, se référer à la méthode suivante.

Exemples 5

E1 **Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto e^x + \ln(x) + x + 2$.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty\end{array}\right\}$$ ainsi, par opérations sur les limites, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

E2 **Étudions la limite en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - 5}{x^2}$.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} e^x - 5 = -4 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+\end{array}\right\}$$ ainsi, par opérations sur les limites, on en déduit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

✍ Rédaction
On décompose bien les différentes limites.

Pourquoi ?
Pourquoi préciser "0^+" ?

E3 **Étudions la limite en 1 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)+3}{x-1}$.**

E4 **Étudions la limite en $-\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x+2}{x^2-\dfrac{1}{x}}$.**

Rédaction

Je conseille d'écrire $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X$ (et pas $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$, même si c'est la même chose, les x et X étant muets dans ces écritures) pour bien mettre en évidence la composition de limites.

E5 **Étudions la limite en 0 de la fonction $f : x \longmapsto e^{-1/x^2}+1$.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0\end{array}\right\}$$ ainsi, par composition de limites, on déduit : $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}=0$.

Conclusion : par opération, on conclut : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

E6 **Étudions la limite en 0 de la fonction $f : x \longmapsto e^{1/x}$.**

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour lever une forme indéterminée :**

- commencer par s'assurer que l'on a bien affaire à une forme indéterminée
- trois possibilités ensuite :
  1. factoriser par les termes qui dominent
  2. utiliser la quantité conjuguée (parfois, quand il y a des racines carrées)
  3. si f est de la forme $\dfrac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}$ et que la FI en x_0 est "$\dfrac{0}{0}$", alors se ramener à une limite en 0 en posant $X = x - x_0$ ou factoriser chaque polynôme par $x - x_0$.
- **simplifier l'expression**, puis conclure en utilisant les règles opératoires sur les limites.

Exemples 6

E1 **Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2+x}$.**

Par opérations, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+2x-5 = +\infty$

Par opérations, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+x = +\infty$

FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

> ✍ **Rédaction**
> On met en avant la FI. On simplifie la factorisation et on étudie ensuite les limites de chaque membre avant de conclure.

- Or, pour x suffisamment grand :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

- Et de plus :
  - ◇ $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2} = 3$
  - ◇ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x} = 2$

  Ainsi, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{3}{2}$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

E2 **Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$.**

> ♡ **Astuce du chef !** ♡
> En fait, on utilise l'expression conjuguée quand les termes dominants à l'intérieur des racines sont identiques. Sinon, on factorise...

E3 **Étudions la limite en 1 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^3-1}$.**

En revanche, il existe encore des cas pour lesquels cette méthode ne peut pas s'appliquer... Voyons des théorèmes généraux qui pourront parfois nous aider...

IV Théorèmes sur les limites

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (non nécessairement borné) ; x_0 un réel de I ou une extrémité (x_0 peut donc être $\pm\infty$) et f, g, h trois fonctions définies sur $I \setminus \{x_0\}$.

Petite remarque

Quand $x_0 \in I$, on exclut le cas où f est définie en x_0, car alors on a vu que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

IV.1 Limites & inégalités

Propriétés 5

P1# Soit $M \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in I \setminus \{x_0\},\ f(x) < M \\ f \text{ a une limite en } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq M$$

P2# On a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in I \setminus \{x_0\},\ f(x) < g(x) \\ f \text{ et } g \text{ ont une limite en } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

✘ Attention !

Les inégalités *strictes* deviennent *larges* en passant à la limite.

Petite remarque

Mêmes résultats avec $>$ et $\geq$.

★ Démonstration :

- Remarquons déjà que ces deux propriétés sont équivalentes !

  $\boxed{\Longrightarrow}$ Si P1 est vraie, alors on considère la fonction $x \longmapsto f(x) - g(x)$ (qui a bien une limite en x_0) et $M = 0$; puis on applique le résultat de P1 qui permet d'obtenir que $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0$.

  Et comme f et g ont toutes les deux une limite en x_0, on a $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. On obtient ainsi le résultat de P2.

  $\boxed{\Longleftarrow}$ Si P2 est vraie, il suffit de prendre $g : x \longmapsto M$ pour obtenir P1.
- Il suffit donc de démontrer P1. Nous ne le ferons que dans le cas où $x_0 = +\infty$.

★

Exemples 7

E1 **Donnons une fonction f telle que : "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$".**

E2 **Donnons deux fonctions f et g telles que "$\forall x \in]0;1[,\ f(x) < g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$".**

IV.2 Théorèmes de comparaison

Le fameux :

Théorème 1 - d'encadrement

On a :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\},\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ f \text{ et } h \text{ ont la même limite } \ell \text{ en } x_0\end{array}\right\} \Longrightarrow g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

Petite remarque

Théorème très utile (parfois appelé théorème des gendarmes, ou théorème du sandwich), qui le sera davan-

Idée de la démonstration

Faisons un schéma, traduisons les limites de f et h puis, pour tout $\varepsilon > 0$, trouvons un voisinage de x_0 sur lequel $|g(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

★ Démonstration : Traitons le cas où $x_0 = +\infty$.

★

Exemple 8

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \geq 4,\ \ln(2) \leq f(x) \leq 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

Déterminons la limite en $+\infty$ de f.

Et un second théorème, dont la démonstration est analogue à celle du théorème d'encadrement :

Théorème 2 - de comparaison

On a :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\},\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Petite remarque

Théorème qui s'adapte (dans l'autre sens) dans le cas $-\infty$...

Exemple 9

Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geq x^2$ et déduisons-en que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

IV.3 Croissances comparées

En application du théorème de comparaison, on peut énoncer les très fameuses croissances comparées qui sont des cas de forme indéterminée à connaître parfaitement.

Propriétés 6 - Croissances Comparées

Pour tous réels $\alpha, \beta, \gamma > 0$:

P1# $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty$

P2# $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{\ln(x)^\gamma} = +\infty$ et en conséquence : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\beta \ln(x)^\gamma = 0$

P3# En conséquence des deux premiers points : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)^\alpha}{\ln(x)^\gamma} = +\infty$

✘ Attention !
Ce sont des cas de formes indéterminées.

"Pas de FI, pas de CC" !

En revanche, il est indispensable de connaître et reconnaître ces croissances comparées et de les manipuler aisément... Si vous ne prenez pas l'habitude de bien les identifier, vous serez bloqués devant de "fausses" formes indéterminées.

★ Démonstration :

P1# Le cas particulier où $\alpha = \beta = 1$ a été démontré dans l'exemple précédent. Soient $\alpha, \beta > 0$.
Pour tout $x > 0$:

$$\frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{\beta}}}{x}\right)^\beta = \left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{\beta}}}{\frac{\alpha x}{\beta}}\right)^\beta \times \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\beta$$

Or, puisque $\alpha, \beta > 0$ on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x}{\beta} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ ainsi, par composition de limites, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{\beta}}}{\frac{\alpha x}{\beta}}\right)^\beta = +\infty$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty$.

P2# ...

P3# Il suffit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\displaystyle\frac{\exp(x)^\alpha}{\ln(x)^\gamma} = \frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta} \times \frac{x^\beta}{\ln(x)^\gamma}$ et d'utiliser P1 et P2... ★

Idée de la démonstration
P1# : transformer $\frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta}$ pour se ramener au cas $\frac{e^x}{x}$.
P2# : se ramener à P1 en posant $y = \ln(x)$ pour la première... Puis se ramener à la première en posant $y = \frac{1}{x}$ dans la seconde
P3# : utiliser P1 et P2...

On peut retenir ces croissances comparées ainsi :

> Toute puissance de l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x, qui l'emporte sur toute puissance du logarithme !

Exemples 10

E1 Cas particuliers des croissances comparées :

$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) =$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} =$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} =$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} =$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x =$

E2 **Montrons que** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}x} - x^3 - \ln(x)^2 = +\infty$.

★ Classique ! ★
On les rencontre dans tous les sens possibles... Il faut donc se familiariser avec toutes ces formes.

IV.4 Théorème de limite monotone

Et un dernier théorème (dont la démonstration des deux premiers cas est hors programme) :

Théorème 3 - de limite monotone

Si f est monotone sur $]a;b[$, alors f possède une limite en a et en b ; et plus précisément :

	f croissante	f décroissante
f majorée	limite finie en b	limite finie en a
f minorée	limite finie en a	limite finie en b
f non majorée	$\lim_b f = +\infty$	$\lim_a f = +\infty$
f non minorée	$\lim_a f = -\infty$	$\lim_b f = -\infty$

Arnaque !
Ce théorème ne permet pas de connaître la valeur de la limite, mais affirme seulement qu'elle existe...
Il sera utile sur des exercices plus théoriques, même si nous en verrons une version très fréquemment utilisée sur les suites.