

L'objectif de ce TP est l'utilisation de Python dans la modélisation d'expériences et variables aléatoires. Nous aurons besoin de la bibliothèque `numpy.random` à importer ainsi :

```
import numpy.random as rd
```

Nous aurons également besoin, pour les graphiques, d'importer :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Pour représenter un histogramme des données contenues dans la liste `Lvaleurs` en fonction de la listes des bornes `Lbornes`, on utilise :

```
plt.hist(Lvaleurs,Lbornes)
```

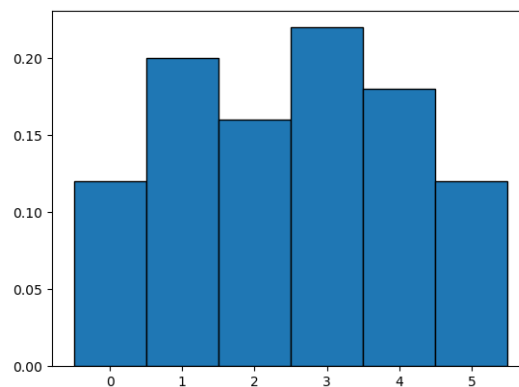
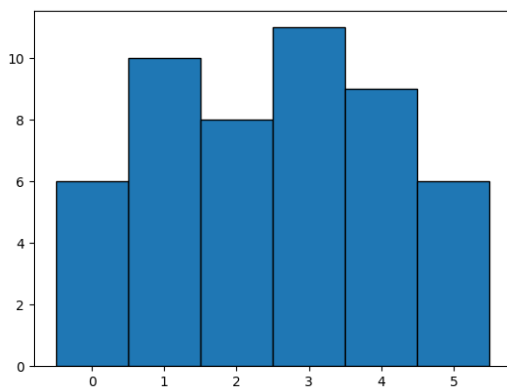
Après la création de l'histogramme, il faut rajouter la ligne `plt.show()` pour le représenter.

Nous aurons besoin des commandes suivantes :

- `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de  $]0;1[$
- `rd.random(N)` renvoie  $N$  réels aléatoires de  $]0;1[$  dans un tableau 1 ligne  $\times$   $N$  colonnes.
- `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire de  $[[a;b[[$
- `rd.randint(a,b,N)` renvoie  $N$  entiers aléatoires de  $[[a;b[[$  dans un tableau 1 ligne  $\times$   $N$  colonnes.

L'exécution des lignes ci-dessous renvoie successivement la figure de gauche puis celle de droite.

```
1 import numpy.random as rd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 L=rd.randint(0,6,50)
5 Labs=[-0.5+k for k in range(0,7)]
6 plt.hist(L,Labs,edgecolor='k')
7 plt.show()
8 plt.hist(L,Labs,edgecolor='k',density=True)
9 plt.show()
```



**PETITE REMARQUE**  
 Par défaut, il s'agit d'un histogramme d'effectifs. Pour obtenir un histogramme de fréquences, on ajoute `density=True` en option dans la commande `plt.hist()`.

**⚠ ATTENTION!**  
 Comme pour la commande `range(a,b)`, la borne de droite est exclue!

**PETITE REMARQUE**  
 L'option `edgecolor='k'` permet de tracer le contour des rectangles en noir.

COMMENTAIRES :

## PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

On lance 3 fois de façon indépendante une pièce donnant PILE avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ . On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus.

1. Que permet de simuler l'exécution du programme suivant ?

```
1 import numpy.random as rd
2
3 x=rd.random()
4 if x<1/3:
5     piece="PILE"
6 else:
7     piece="FACE"
8 print(piece)
```

2. Écrire une fonction telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

3. Réaliser 1000 simulations de la variable aléatoire X et représenter l'histogramme des données ainsi obtenues.

4. De quoi cet histogramme est-il proche ?

5. Comment obtenir une valeur approchée de  $\mathbb{E}(X)$  ?

### POUR INFO...

La loi faible des grands nombres stipule que la moyenne d'un grand nombre de réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X est proche de  $\mathbb{E}(X)$ .

## SECONDE EXPÉRIENCE.

On lance successivement et de façon indépendante une pièce donnant PILE avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  jusqu'à obtenir le premier PILE, et on s'arrête dans tous les cas après le 4<sup>ème</sup> lancer. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

1. Écrire une fonction telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

### PETITE REMARQUE

C'est le contexte de l'exercice 12 du chapitre 12.

2. Réaliser 1000 simulations de la variable aléatoire  $X$  et représenter l'histogramme des données ainsi obtenues.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
3. Donner une valeur approchée de  $\mathbb{P}([X = 0])$ .
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. Écrire un programme permettant d'obtenir une valeur approchée de  $E(X)$ .

## TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Soit  $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ . On considère une urne composée de  $n$  boules, numérotées de 1 à  $n$ , indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans cette urne. On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Écrire une fonction telle que l'exécution de `simul_X(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire  $X_n$ .

PETITE REMARQUE  
C'est le contexte de l'exercice 17 du chapitre 12.

2. Réaliser 1000 simulations de la variable aléatoire  $X_5$  et représenter l'histogramme des données ainsi obtenues.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
3. Écrire un programme permettant d'obtenir une valeur approchée de  $E(X_5)$  et de  $V(X_5)$ .

## QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

$N$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose d'une urne contenant  $(N - 1)$  balles blanches et une balle noire. On effectue des tirages sans remise dans l'urne, jusqu'à l'obtention de la balle noire. On note  $X_N$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Écrire une fonction Python telle que l'exécution de la commande `simul_X(N)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire  $X_N$ .
2. En déduire un programme permettant d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire  $X_N$ , dans le cas où  $N = 5$ , puis  $N = 10$ .  
Que peut-on conjecturer ?
3. Démontrer cette conjecture. Justifier ensuite que  $X_N$  possède une espérance et la calculer.