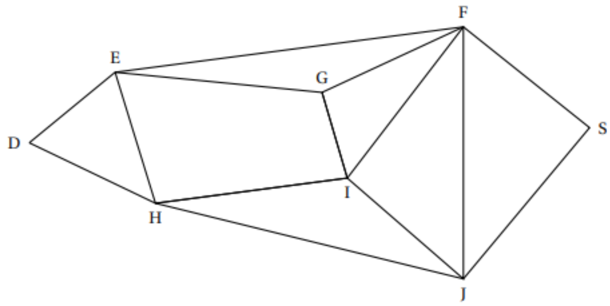
Exercices du chapitre 23
Graphes

●○○○ Exercice 1 - Vrai / faux

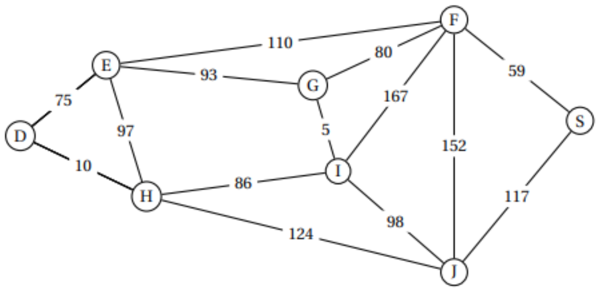
1. Un graphe est non connexe si, et seulement si, il a au moins un sommet isolé.
2. Dans un groupe de vingt enfants, il est impossible que sept d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, neuf d'entre eux en aient exactement 4, et quatre d'entre eux exactement 5.
3. Dans un graphe simple et connexe, il existe toujours au moins deux sommets de même degré.
4. Soient $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre n et M sa matrice d'adjacence. Si le coefficient (i,j) de la matrice $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}^k$ vaut 2, alors il existe exactement deux chaînes simples reliant les sommets i et j.
5. Il existe des graphes connexes dans lesquels tous les sommets ont un degré d'intermédiarité nul.
6. Si un sommet a un degré plus élevé qu'un autre, alors il a nécessairement une meilleure centralité d'intermédiarité.

●○○○ Exercice 2 - Cyclisme

Un club cycliste se prépare pour une compétition. Le graphe ci-dessous représente l'ensemble des routes empruntables le jour de la compétition.



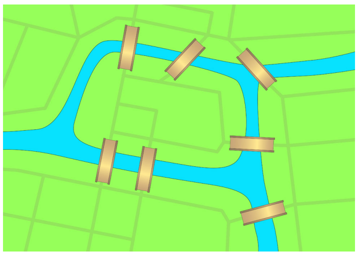
1. Ce graphe est-il connexe ?
2. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule ? Si oui, en donner un.
3. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule avec le même point de départ et d'arrivée ? Si oui, en donner un.
4. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe, notée M.
5. On donne : $\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 11 & 8 & 10 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 8 & 6 & 12 & 11 & 7 \\ 3 & 8 & 8 & 4 & 5 & 9 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 12 & 9 & 10 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 11 & 6 & 6 & 9 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
   Un cycliste souhaite aller du point D au point F en empruntant seulement 3 routes. Combien d'itinéraires différents sont possibles ? Les donner tous.
6. Sur le graphe ci-dessous, on a indiqué le temps, en minute, mis par un des cyclistes pour parcourir chacune des routes.



En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet qu'il doit emprunter pour relier D à S en un temps minimal.

●●○○ Exercice 3 - Les ponts de Königsberg

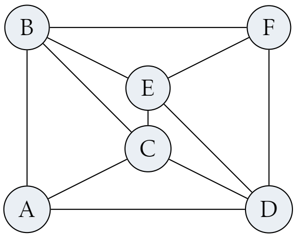
Voici un schéma de la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) :



Peut-on tranquillement se balader dans Königsberg, en passant une et une seule fois par chaque pont, tout en revenant à son point de départ ?

●●○○ Exercice 4

On considère le graphe suivant :



1. Ce graphe est-il connexe ?
2. Ce graphe possède-t-il une chaîne eulérienne ?
3. Justifier que ce graphe ne possède pas de cycle eulérien. Quelle arête ajouter pour qu'il en possède un ?
4. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe. On donne $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer les centralités de proximité et d'intermédiarité de E et F.

●●○○ Exercice 5 - Connexité 1

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté, simple, d'ordre $2p$ tel que le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à p.
Démontrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

●●●○ Exercice 6 - Connexité 2

Démontrer que dans un graphe simple connexe dont tout sommet est de degré pair, la suppression d'une arête ne détruit pas la connexité du graphe.

●●●○ Exercice 7 - Graphe régulier

On dit qu'un graphe est **régulier** lorsqu'il est simple et que tous ses sommets ont même degré.
Dans cet exercice, on s'intéresse aux graphes réguliers dont les sommets sont de degré 3.

1. Que dire de l'ordre d'un tel graphe ?
2. Démontrer que pour tout $p \in [\![2;+\infty[\![$, il existe un graphe régulier d'ordre $2p$ dont les sommets sont de degré 3.

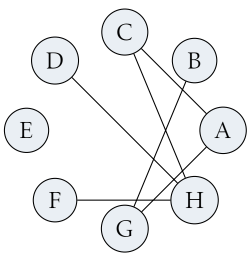
●●●○ Exercice 8 - Graphe aléatoire d'Erdös-Renyi

Toutes les variables aléatoires de l'exercice seront définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $p \in]0;1[$. Pour construire un graphe aléatoire non orienté d'Erdös-Renyi, on se donne :

- un ensemble de sommet $\mathrm{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$,
- une famille de variables aléatoires $(\mathrm{A}_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ indépendantes suivant toute la même loi de Bernoulli de paramètre p,
- des arêtes telles que pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $s_i - s_j$ est une arête du graphe si, et seulement si, $\mathrm{A}_{i,j} = 1$.
  Autrement dit, chaque arête possible entre les sommets de $\mathcal{G}$ apparaît avec une probabilité p, de façon indépendante des autres arêtes.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{G}_n$ un tel graphe aléatoire d'ordre n.

1. **Exemple.** Dans le cas $n = 8$ et $p = 0,2$, on a obtenu le graphe suivant :



Ce graphe est-il connexe ? Si non, combien possède-t-il de composantes connexes ?

2. Quel est le nombre maximal d'arêtes que peut posséder $\mathcal{G}_n$?
3. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def listeAdj(S,p)` qui renvoie la liste des listes d'adjacence d'un tel graphe aléatoire ayant S pour liste de sommets.
4. On pose $X_n = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}$.
   - **4.a.** Quelle est la loi suivie par X_n ?
   - **4.b.** Interpréter les valeurs prises par X_n dans le contexte de l'exercice.
   - **4.c.** Rappeler $\mathbb{E}(X_n)$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On note D_k la variable aléatoire égale au degré du sommet s_k. Déterminer la loi de D_k.
6. On note I_n la variable aléatoire égale au nombre de sommets isolés de $\mathcal{G}_n$. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note $I_{n,k}$ la variable aléatoire égale à 1 si s_k est isolé, 0 sinon.
   - **6.a.** Quelle est la loi de $I_{n,k}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$?
   - **6.b.** Montrer que $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_{n,k}$. En déduire $\mathbb{E}(I_n)$.
   - **6.c.** Montrer que $I_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} I_{n,k} + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} I_{n,i} I_{n,j}$.
   - **6.d.** Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i < j$. Justifier que $\mathbb{P}([I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1]) = (1-p)^{2n-3}$.
     En déduire que $\mathbb{E}(I_n^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$.
7. On suppose désormais que $p = p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, avec $c > 0$ et $c \neq 1$.
   - **7.a.**
     - **7.a.i.** Écrire une fonction `Python` d'en-tête `I(liste)` qui prend un argument la liste des listes d'adjacence d'un graphe, et renvoie le nombre de sommets isolés de ce graphe.
     - **7.a.ii.** On souhaite estimer l'influence de la valeur de c sur le nombre de sommets isolés. En exécutant le script suivant

```python
liste2c=[0.3,0.5,0.7,1.3,1.5,1.7]
n=1000
res=[]

for c in liste2c:
    s=0
    for k in range(200):
        if I(listeAdj(range(1,n+1),c*np.log(n)/n))==0:
            s+=1
    res.append(s/200)
print(res)
```

       on obtient la liste `[0.0, 0.0, 0.0, 0.91, 0.975, 0.99]`.
       Quelles conjectures peut-on faire lorsque $c < 1$ et $c > 1$?
   - **7.b.** **Résultats probabilistes préliminaires.** Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs discrètes positives admettant une espérance $\mathbb{E}(Y)$. Soit a un réel strictement positif.
     Considérons la variable aléatoire Z définie par :
     $$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } Y(\omega) \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
     - **7.b.i.** Déterminer $Z(\Omega)$.
     - **7.b.ii.** Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
     - **7.b.iii.** Établir : $Z \leq Y$.
     - **7.b.iv.** Démontrer alors l'inégalité de Markov :
       $$\mathbb{P}([Y \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$
     - **7.b.v.** En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, valable pour toute variable aléatoire X admettant une variance et tout réel strictement positif α :
       $$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$
   - **7.c.**
     - **7.c.i.** Montrer que $(1-p_n)^{n-1} \sim (1-p_n)^n$ puis que $(1-p_n)^n \sim \dfrac{1}{n^c}$.
     - **7.c.ii.** A l'aide de l'inégalité de Markov, déterminer alors les limites de $\mathbb{P}([I_n \geq 1])$ puis $\mathbb{P}([I_n = 0])$ lorsque $n \to +\infty$ dans le cas où $c > 1$.
     - **7.c.iii.** En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}([I_n = 0]) \leq \dfrac{\mathbb{V}(I_n)}{\mathbb{E}(I_n)^2}$. En déduire que si $c < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([I_n = 0]) = 0$.
     - **7.c.iv.** Les conjectures faites à la question 7(a)ii sont-elles valides ?