Exercices du chapitre 22
Équations différentielles linéaires

●○○○ Exercice 1 - Résolution d'EDL1

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y' - y = 2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
5. $y' + y = e^x + x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
6. $y' - y = -2e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
7. $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$
8. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
9. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
10. $y' - 4y = e^{2x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
11. $y' - 4y = e^{4x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
    Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \mathrm{P}(x)e^{4x}$, avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.
12. $y' + y = 2xe^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
    Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \mathrm{P}(x)e^{-x}$, avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

●○○○ Exercice 2 - Résolution d'EDL2

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y'' + y' - 2y = 4$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y'' - 2y' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 1.
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \mathrm{P}(x)e^{-x}$, avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \mathrm{P}(x)e^{x}$, avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

●●○○ Exercice 3 - Solution particulière d'une EDL2

Notons (E) l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{t-1}{t^2}e^{-t}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathrm{R})$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Soit y une solution de (E). On pose $z : t \longmapsto y(t)e^t$.
   - 2.a. Donner une équation différentielle vérifiée par z.
   - 2.b. Déterminer alors l'expression de z.
   - 2.c. Donner alors une solution particulière de (E).
3. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

●●○○ Exercice 4 - Changement d'inconnue

On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathrm{E}) : \begin{cases} y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Procédons par analyse-synthèse pour le résoudre.

1. **Analyse.** Soit y une solution du problème de Cauchy (E). On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) > 0$ et on pose $z = \sqrt{y}$.
   - 1.a. Vérifier que $2z' + 2z = x + 1$.
   - 1.b. En déduire les candidats-solutions possibles pour z, puis pour y.
2. **Synthèse.** Les candidats-solutions sont-elles des solutions du problème de Cauchy (E)?

●●●○ Exercice 5 - Changement d'inconnue

Résoudre le problème de Cauchy (E) : $\begin{cases} xy' - xe^{-\frac{y}{x}} - y = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(]e^{-1};+\infty[,\mathbb{R})$, en posant $z : x \longmapsto \frac{1}{x}y(x)$.

●●○○ Exercice 6 - Transformation par changement de variable

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_*^+,\mathbb{R})$.

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. **Analyse.** Soit y une solution de (E). On pose $z : t \longmapsto y(e^t)$.
   - 2.a. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   - 2.b. En déduire que z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera. *Indication : on pourra poser le changement de variable $x = e^t$ dans* (E).
   - 2.c. En déduire z.
   - 2.d. Conclure sur les candidats-solutions de (E).
3. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
4. Conclure.

●●○○ Exercice 7 - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et posons $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{-x}$. Établir :

$$\big(f \text{ est solution de (E)}\big) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

●●○○ Exercice 8 - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{e^{-x}}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' - y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et posons $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{x}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ' pour que f soit solution de (E).
3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

●●●○ Exercice 9 - EDL1 normalisée à coefficient non constant (cas général)

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation (E) : $y' + ay = b$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$, et on note $(\mathrm{E_H})$ l'équation différentielle homogène associée à (E).

1. Justifier que a possède des primitives sur I. *On notera* A *l'une d'elles.*
2. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E_H})$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-\mathrm{A}(x)} \ /\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, où A désigne une primitive de a sur I.
3. Supposons que (E) possède au moins une solution, notée f_p.
   Établir que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$: f est solution de $y' + ay = b$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = f_p(x) + \lambda e^{-\mathrm{A}(x)}$.
4. Soient maintenant $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{-\mathrm{A}(x)}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit solution de (E).
5. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).
6. En déduire le théorème sur le problème de Cauchy associé à une EDL1.
7. **Applications.** Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - 7.a. $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+,\mathbb{R})$
   - 7.b. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

●●○○ Exercice 10 - Système différentiel homogène à coefficients constants

1. **Algèbre linéaire.** Considérons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
   - 1.a. Déterminer le rang de $f - 6\mathrm{id}$. En déduire la dimension puis une base de $\ker(f - 6\mathrm{id})$.
   - 1.b. Posons $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi que $\mathrm{U} = \mathrm{AV} - 2\mathrm{V}$ et $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
     - 1.b.i. Montrer que $(\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W})$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1.b.ii. Déterminer la matrice de f dans cette base, notée T.

1.b.iii. Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible. *On ne cherchera pas à calculer* P^{-1}, *mais on admettra que* $A = PTP^{-1}$.

2. **Système différentiel.**
On considère le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) & = & x(t) - y(t) + 2z(t) \end{array} \right.$$

d'inconnues $x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on admet que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

2.a. Vérifier que pour tout réel t : $X'(t) = AX(t)$.

2.b. On note, pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et on admet que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Y'(t) = TY(t)$.

2.c. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \longmapsto cte^{2t}$ est solution de l'équation différentielle $f' = 2f + ce^{2t}$.

2.d. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $Y(t)$ en fonction de t.

2.e. Montrer alors qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array} \right.$$

2.f. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)\right)e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right)e^{6t} \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - z_0)\right)e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right)e^{6t} \\ z(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0\right)e^{2t} \end{array} \right.$$

2.g. Que dire si $x(0) = y(0)$?

●●○○ Exercice 11 - EDL3 homogène à coefficients constants

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \;\; ; \;\; y''(0) = 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note, pour tout réel x, $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Y'(x) = AY(x)$.
2. **Diagonalisation de A.**

2.a. Déterminer les réels λ de sorte que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

2.b. Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\ker(A - \lambda I_3)$. *On prendra, si possible, des matrices colonnes dont la première composante vaut 1.*

2.c. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

2.d. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera* D *la matrice obtenue.*

3. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$. On admet qu'il existe trois fonctions u, v, w, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x : $Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ et $Z'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \\ w'(x) \end{pmatrix}$.

3.a. Déterminer $Z(0)$.

3.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Y'(x) = AY(x) \iff Z'(x) = DZ(x)$$

3.c. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$.

4. Conclure sur le problème de Cauchy initial.

●●○○ Exercice 12 - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y) \quad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.
   - **1.a.** Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$?
     Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que f n'est pas la fonction constante nulle.
   - **1.b.** Déterminer $f(0)$.
   - **1.c.** Établir :
     $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - f(0)}{h}$$
   - **1.d.** En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
   - **1.e.** Conclure sur les candidats-solutions.
2. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
3. Conclure.

●●○○ Exercice 13 - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1 \ \ ; \ \ f(0) = -4 \quad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations $(\star)$. Posons $g : x \longmapsto f(x)f(-x)$.
   - **1.a.** Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.
   - **1.b.** En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
   - **1.c.** Conclure sur les candidats-solutions.
2. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
3. Conclure.

●●●● Exercice 14 - Comportement des solutions d'une ED non linéaire

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $y' = e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y}$. Déterminer les limites de y et y' en $+\infty$.