Les Chartreux

22

Fonctions

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Introduction...

Les équations différentielles sont apparues au XVIIème siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration ; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique.
Ce n'est qu'à partir du XVIIIème siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite uvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles ; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques - l'analyse numérique - développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

Pour bien démarrer...

1 # C'est l'occasion de revoir les études de fonctions (limites, continuité, dérivabilité, intégration).

2 # Il faut savoir parfaitement dériver et primitiver !

Fonction	Une primitive
$x \longmapsto 0$	
$x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$	
$x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$x \longmapsto e^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$	
$u'e^u$	
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \in [\![2;+\infty[\![)$	
$\dfrac{u'}{u}$	
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	

3 # Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Donner une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = af(x)$. Peut-on en donner d'autres ?

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Généralités sur les équations différentielles

I.1 Premières définitions

Définitions 1 - Équation différentielle, solution, trajectoire, équilibre

D1# On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.

D2# Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n, b$ des fonctions définies et continues sur I, telles que a_n n'est pas la fonction nulle.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

D3# Par convention, la fonction y et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.

D4# Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

D5# Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.

D6# Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

> **Petite remarque**
> Souvent, f est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera y **la fonction inconnue** d'une équation différentielle.

> **Vocabulaire**
> Les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les **coefficients de l'équation différentielle**.

> **✘ Attention !**
> Il s'agit d'une égalité de fonctions !

> **Petite remarque**
> Si l'intervalle I n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de $\mathbb{R}$.

Exemples 1

E1 L'équation $y'' \times y' + 3y^2 = g$, où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \longmapsto e^x + x^2 - 1$, est une équation différentielle. Une solution f de cette équation différentielle est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = e^x + x^2 - 1$$

> **✓ Rigueur !**
> Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et x n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc... sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes...

E2 Sont des équations différentielles linéaires :

> **En fait...**
> Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en y...

E3 Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

E4 L'équation (E) : $y' - 2xy = 2x^2 - 1$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et $(\mathrm{E_H})$: $y' - 2xy = 0$ est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \longmapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de $y' - 2xy = 0$.

- Déterminons toutes les solutions de (E) qui sont dans $\mathbb{R}_1[x]$.

Vocabulaire
On a ainsi trouvé une **solution particulière** de (E).

- Vérifions que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda + f_p$ est solution de (E).

☞ Pour info...
Ce résultat est fondamental dans l'étude des équations différentielles linéaires... Nous en reparlerons juste après.

E5 Déterminons tous les équilibres de l'équation différentielle (E) : $y' + y^2 = 1$.

E6 Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

I.2 La linéarité, c'est le pied !

Propriétés 1 - Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL

Soient (E) une équation différentielle linéaire et $(\mathrm{E_H})$ son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons $\mathrm{S_E}$ l'ensemble des solutions de E, $\mathrm{S_H}$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E_H})$.

P1# $\mathrm{S_H}$ est un espace vectoriel.

P2# Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de $(\mathrm{E_H})$. Autrement dit :

solution générale de l'EDL = solution particulière de l'EDL + solution générale de l'équation homogène associée

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$\mathrm{S_E} = \left\{ f_p + f_\mathrm{H} \ / \ f_\mathrm{H} \in \mathrm{S_H} \right\}$$

Important !
Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

★ **Démonstration** : Considérons, avec les notations précédemment introduites :

$$(\mathrm{E}) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

et ainsi :

$$(\mathrm{E_H}) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

toutes deux d'inconnue $y \in \mathcal{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
Posons $\mathrm{L} : y \longmapsto a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$, définie sur $\mathcal{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

Petite remarque
Il n'est pas nécessaire de poser cette application, mais cela permet de simplifier les écritures et de faire un lien avec l'algèbre linéaire.

★

Propriété 2 - Principe de superposition

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ ainsi que b_1 et b_2 des fonctions continues sur I.
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\mathrm{E}_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (\mathrm{E}_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 une solution de (E_2), alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

★ **Démonstration** : Là encore, considérons l'application linéaire $\mathrm{L} : y \longmapsto a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$.
Soient f_1 une solution de (E_1) et f_2 une solution de (E_2). Soient également $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de L :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1 \mathrm{L}(f_1) + \lambda_2 \mathrm{L}(f_2) \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned} \quad f_1 \text{ solution de } (\mathrm{E}_1) \text{ et } f_2 \text{ solution de } (\mathrm{E}_2)$$

Conclusion : la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

★

Exemple 2

Une solution particulière de $y' + y = 1$:

Une solution particulière de $y' + y = x$:

Par conséquent, une solution particulière de $y' + y = 3 + 2x$ est :

Pour la suite du cours, ciblons sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

II EDL du premier ordre à coefficients constants

Définition 2 - EDL1 à coefficients constants

Soient a_0 et a_1 des réels tels que $a_1 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Puisque $a_1 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$:

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

Vocabulaire
On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL1 normalisées de la forme : $y' + ay = b$ ($a \in \mathbb{R}$, b une fonction continue sur I).
Si l'EDL1 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

Exemples 3

E1 Sont des EDL1 à coefficients constants :

E2 Ne sont pas des EDL1 à coefficients constants :

II.1 Résolution d'une EDL1

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

solution générale de l'EDL = solution particulière de l'EDL + solution générale de l'équation homogène associée

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$
- trouver une solution particulière de $y' + ay = b$...

Théorème 1 - Résolution de $y' + ay = 0$

Soient $a \in \mathbb{R}$.

$$\left(f \text{ est solution de l'EDL1 } y' + ay = 0\right) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = \lambda e^{-ax}\right)$$

Autrement dit : les solutions de l'équation $(\mathrm{E_H})$: $y' + ay = 0$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, sont les fonctions $x \in \mathrm{I} \longmapsto \lambda e^{-ax}$, avec λ parcourant $\mathbb{R}$.
Ou encore : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\left\{x \in \mathrm{I} \longmapsto \lambda e^{-ax} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Petite remarque
On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$.
On en a même une base : $\left(x \longmapsto e^{-ax}\right)$.

★ Démonstration :

★

Exemple 4

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-2x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Pour la recherche de solutions particulières : il n'y a pas de règle générale...

Exemples 5

E1 On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 6$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{3x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque également que la fonction $x \longmapsto -2$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 6$ est $\left\{x \longmapsto -2 + \lambda e^{3x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

À retenir...
Si b est une constante, alors une solution particulière de $y' + ay = b$ est $\frac{b}{a}$, si $a \neq 0$.
Et si $a = 0$?

E2 Résolvons l'équation différentielle $y' + y = x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer une solution particulière de $y' + ay = b$:**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si b est constante, la fonction constante $x \longmapsto \frac{b}{a}$ convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

II.2 Problème de Cauchy sur EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y' + ay = b$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

Théorème 2 - de Cauchy-Lipschitz sur EDL1

Si a est un réel et b une fonction continue sur I, alors pour tous $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire — Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition $y(x_0) = y_0$ en est la **condition initiale**.

★ Démonstration : En exercice. ★

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques. Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais.
Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante λ dans la forme générale des solutions.

Exemple 6

Résolvons le problème de Cauchy établi au début du chapitre :

III EDL du second ordre à coefficients constants

Définition 3 - EDL2 à coefficients constants

Soient a_0, a_1, a_2 des réels tels que $a_2 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Puisque $a_2 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathcal{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

Vocabulaire — On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL2 normalisées de la forme : $y''+ay'+by=c$ ($a,b\in\mathbb{R}$, c une fonction continue sur I).
Si l'EDL2 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

Exemples 7

E1 Sont des EDL2 à coefficients constants :

E2 Ne sont pas des EDL2 à coefficients constants :

III.1 Résolution d'une EDL2

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

solution générale de l'EDL = solution particulière de l'EDL + solution générale de l'équation homogène associée

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y''+ay'+by=0$
- trouver une solution particulière de $y''+ay'+by=c$...

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

Définition 4 - Équation caractéristique

Soient $a,b\in\mathbb{R}$.
L'équation $r^2+ar+b=0$, d'inconnue $r\in\mathbb{R}$, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$.

Théorème 3 - Résolution de $y''+ay'+by=0$

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$.

1. Si $\Delta>0$, alors l'équation $r^2+ar+b=0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :
$$\Big(f \text{ est solution de l'EDL2 } y''+ay'+by=0\Big) \iff \Big(\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathrm{I},\ f(x)=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}\Big)$$
Autrement dit : les solutions de l'équation $(\mathrm{E_H})$: $y''+ay'+by=0$, où $y\in\mathcal{C}^2(\mathrm{I},\mathbb{R})$, sont les fonctions $x\in\mathrm{I}\longmapsto\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}$, avec λ,μ parcourant $\mathbb{R}$.
Ou encore : l'ensemble des solutions de $y''+ay'+by=0$ est $\Big\{x\in\mathrm{I}\longmapsto\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\Big\}$.
2. Si $\Delta=0$, alors l'équation $r^2+ar+b=0$ admet une solution r_0 et :
$$\Big(f \text{ est solution de l'EDL2 } y''+ay'+by=0\Big) \iff \Big(\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathrm{I},\ f(x)=(\lambda x+\mu)e^{r_0x}\Big)$$
Autrement dit : les solutions de l'équation $(\mathrm{E_H})$: $y''+ay'+by=0$, où $y\in\mathcal{C}^2(\mathrm{I},\mathbb{R})$, sont les fonctions $x\in\mathrm{I}\longmapsto(\lambda x+\mu)e^{r_0x}$, avec λ,μ parcourant $\mathbb{R}$.
Ou encore : l'ensemble des solutions de $y''+ay'+by=0$ est $\Big\{x\in\mathrm{I}\longmapsto(\lambda x+\mu)e^{r_0x}\ /\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\Big\}$.

Petite remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y''+ay'+by=0$. On en a même une base :
- si $\Delta>0$: $\big(x\longmapsto e^{r_1x}, x\longmapsto e^{r_2x}\big)$
- si $\Delta=0$: $\big(x\longmapsto xe^{r_0x}, x\longmapsto e^{r_0x}\big)$

★ Démonstration :

★

EXEMPLES 8

E1 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$ est

E2 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est

Pour la recherche de solutions particulières : il n'y a pas de règle générale...

EXEMPLES 9

E1 On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $\left\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque également que la fonction $x \longmapsto 1$ est une solution particulière de $y'' + 2y' + y = 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$ est $\left\{x \longmapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^{-x} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.

À RETENIR...
Si c est une constante, alors une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$ est $\frac{c}{b}$, si $b \neq 0$.
Et si $b = 0$?

E2 Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y = 4x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour déterminer une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$:**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si c est constante, la fonction constante $x \longmapsto \frac{c}{b}$ (quand $b \neq 0$) convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

III.2 Problème de Cauchy sur EDL2

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y'' + ay' + by = c$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

Théorème 4 - de Cauchy-Lipschitz sur EDL2

Si a et b sont des réels réel et c une fonction continue sur I, alors pour tous $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 \;\; ; \;\; y'(x_0) = z_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ en sont les **conditions initiales**.

★ Démonstration : Celui-ci, on l'admet, faut pas déconner non-plus ! ★

♣ **Méthode 4** ♣ **Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes λ et μ dans la forme générale des solutions.

Exemple 10

Résolvons le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2x - 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On tourne en rond ?

On voit que la fonction exponentielle joue un rôle essentiel dans la résolution des équations différentielles vues dans ce chapitre. Mais... cette même fonction a été définie comme unique solution d'un certain problème de Cauchy ; et nous en avions admis l'existence... Il serait peut-être temps de s'en occuper !