21

Probabilités

Lois discrètes usuelles

Introduction...

Parlons de Laplace !
Pierre-Simon Laplace (1749-1827) est un astronome, mathématicien, physicien et homme politique français. Né dans le Calvados (rien que pour ceci, il a toute sa place dans une introduction de cours), il quitte la Normandie à 18 ans pour se consacrer à l'étude des mathématiques à Paris.
Sa contribution fut considérable dans différents domaines et ses travaux en astronomie l'ont amené à l'étude des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, qui ont nécessité l'introduction d'outils mathématiques importants tels que le laplacien, la transformée de Laplace ou la méthode des différences finies.
Très tôt, il s'intéresse également aux probabilités et aux statistiques. En particulier :

- il s'intéressera aux variables aléatoires à densité et sera le premier à établir : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$;
- il démontrera le théorème de Moivre-Laplace (précédemment démontré par Moivre dans un cas particulier, puis dans le cas général par Laplace) qui donnera par ensuite, dans une version plus générale, le célèbre théorème central limite ;
- il travaillera également sur la méthode des moindre carrés (introduite et étudiée par Legendre avant lui).

Reconnu par ses pairs, il semble pourtant qu'il ait parfois eu peu d'estime pour certains d'entre eux, desquels il se serait approprié quelques travaux...

Pour bien démarrer...

1 # Revoir les précédents chapitres de probabilités.

2 # Que représente $\binom{n}{k}$?

3 # Formule de $\binom{n}{k}$ avec les factorielles :

4 # Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si X possède une espérance et un moment d'ordre 2, alors : $\mathbb{E}(X) =$ et $\mathbb{E}(X^2) =$

5 # Formule de Koenig-Huygens :

6 # Formule des probabilités totales donnant $\mathbb{P}(B)$ avec le sce $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

I Lois usuelles

Ce chapitre est un inventaire des lois discrètes usuelles qu'il faut parfaitement connaître (les démonstrations seront faites en exercices).

Nom & notation	$X(\Omega)$	Loi de probabilité	Espérance & Variance	Contexte
Certaine égale à a $a \in \mathbb{R}$	$\{a\}$	$\mathbb{P}([X = a]) = 1$ $\forall x \neq a,\ \mathbb{P}([X = x]) = 0$	$\mathbb{E}(X) = a$ $\mathbb{V}(X) = 0$	Variable aléatoire constante... Remarque : si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors X est quasi-certaine ($\exists a \in X(\Omega) \,/\, \mathbb{P}([X = a]) = 1$).
Uniforme sur $[\![1;n]\!]$ $n \in \mathbb{N}^*$ $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1;n]\!]\big)$	$[\![1;n]\!]$	$\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{n}$	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$	Situation d'équiprobabilité sur les différentes valeurs de X à valeurs entières entre 1 et n.
Uniforme sur $[\![a;b]\!]$ $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![a;b]\!]\big)$	$[\![a;b]\!]$	$\forall k \in [\![a;b]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{b-a+1}$	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$	Situation d'équiprobabilité sur les différentes valeurs de X à valeurs entières entre a et b.
de Bernoulli [1] de paramètre p $p \in]0;1[$ $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0;1\}$	$\mathbb{P}([X = 0]) = 1-p$ $\mathbb{P}([X = 1]) = p$	$\mathbb{E}(X) = p$ $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$	Expérience : seulement 2 issues, un *succès* et un *échec* (*épreuve de Bernoulli*). X associe 1 au succès et 0 à l'échec. p est la probabilité du succès.
Binomiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$	$[\![0;n]\!]$	$\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$ $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$	Expérience : répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p (*schéma de Bernoulli*). X compte le nombre de succès sur ces n répétitions.
Géométrique de paramètre p $p \in]0;1[$ $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1} p$	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$	Expérience : répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p. X donne le rang du premier succès (ou le nombre de répétitions nécessaires au premier succès).
de Poisson [2] de paramètre λ $\lambda > 0$ $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = k]) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$ $\mathbb{V}(X) = \lambda$	X représente souvent le nombre d'apparitions d'un phénomène rare. *Pas de panique, l'énoncé mentionnera toujours quand il s'agira d'une loi de Poisson !*

1. Jacques Bernoulli (1654-1705) : mathématicien suisse. Membre d'une belle lignée de mathématiciens suisses du nom de BERNOULLI (et à ne pas confondre avec le petit-fils de son frère qui s'appelle aussi Jacques BERNOULLI). On lui doit, entre autres, d'importants résultats sur les séries (et leurs applications aux probabilités) ainsi que sur les équations différentielles.
2. Siméon Denis Poisson (1781-1840) : mathématicien et physicien français. On lui doit de nombreux résultats en physique (mécanique, électricité et magnétisme), en analyse appliquée (intégrales et séries de Fourier, équations aux dérivées partielles) et en probabilités.

II Lien binomiale / Poisson

Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels de l'intervalle $]0;1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère X_n et Y deux variables aléatoires telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p_n)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$.

II.1 Idée

A l'aide de Geogebra, ici, on remarque que, pour "n suffisamment grand" :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\quad \mathbb{P}([X_n = k]) \simeq \mathbb{P}([Y = k])$$

Ce qui tend donc à nous faire penser que pour "n suffisamment grand", la loi de X_n est similaire à celle de Y.

☞ Pour info...
En pratique, on fait cette approximation dans les conditions suivantes : $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 15$.

II.2 Démonstration

Montrons donc que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}\left(\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

★Subtile...★
C'est bien pour tout $k \in \mathbb{N}$ que la limite doit être égale, et pas $k \in [\![0;n]\!]$...

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, pour $n \in [\![k;+\infty[\![$:

Petite remarque
n est destiné à tendre vers $+\infty$, donc il n'est pas dérangeant de le prendre supérieur ou égal à k.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(k-1))}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)(1-p_n)^{n-k}
\end{aligned}$$

Passons à la limite :

- Par opération :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(np_n)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

- Par opération :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) = 1$$

- De plus, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$. Et de plus :

$$\begin{aligned}
(1-p_n)^{n-k} &= \exp\big((n-k)\ln(1-p_n)\big) \\
&= \exp\big(-k\ln(1-p_n)\big)\exp\big(n\ln(1-p_n)\big) \\
&= \exp\big(-k\ln(1-p_n)\big)\exp\left(-np_n\times\frac{\ln(1-p_n)}{-p_n}\right)
\end{aligned}$$

✘ Attention !
Si on cherche à déterminer la limite de $(1-p_n)^{n-k}$, on a la fameuse FI "1^∞".

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -p_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1-p_n)}{-p_n} = 1$$

On obtient donc, par opérations et composition :

$$\lim_{n\to+\infty}\exp\big(-k\ln(1-p_n)\big)\exp\left(-np_n\times\frac{\ln(1-p_n)}{-p_n}\right) = e^{-\lambda}$$

Par produit, on obtient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}\right) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Si $np_n \to \lambda$, alors la loi de Poisson de paramètre λ peut être vue comme "loi limite" d'une suite de variables aléatoires suivant une loi $\mathcal{B}(n;p_n)$.

Vocabulaire
L'an prochain, on dira que si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)$, alors (X_n) converge en loi vers X, où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.