Exercices du chapitre 20
Applications linéaires

●○○○ Exercice 1
Dans chaque cas, l'application f donnée est-elle une application linéaire sur E ?

1. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x + y$
2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \longmapsto (x^2, x + y)$
3. $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}'(\mathrm{X})$
4. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + z \\ x - y \\ x + y + z \end{pmatrix}$
5. $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{P}(0) + \mathrm{P}'(\mathrm{X})$
6. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \longmapsto (z, y, x + 1)$

●●○○ Exercice 2
Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Montrer que si f et g coïncident sur une base de E, alors f et g sont égales.

●○○○ Exercice 3
Dans chaque cas, montrer que f est une application linéaire (expliciter les espaces vectoriels de départ et d'arrivée), donner sa matrice canoniquement associée puis déterminer une base de son noyau et de son image, et préciser également si elle est injective/surjective/bijective.

1. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix}$
2. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
3. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix}$
4. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ y - 3z \\ 2z \end{pmatrix}$
5. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x - y + z$
6. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + z \\ y - z \end{pmatrix}$
7. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2z \\ 2x + y + z \\ 2y - z \end{pmatrix}$
8. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + y + z \\ 3x + 3y \end{pmatrix}$
9. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$
10. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 3y + 2z + 2t \\ 3x + 4y + z + 6t \\ 2x + y - z + 4t \\ x - 2y - 3z + 2t \end{pmatrix}$

●○○○ Exercice 4
Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et f l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ f(\mathrm{P}(\mathrm{X})) = \mathrm{P}'(\mathrm{X})$.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$. Calculer $f(\mathrm{P}(\mathrm{X}))$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E, puis donner sa matrice dans la base canonique de E.
3. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

●○○○ Exercice 5
Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et f l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ f(\mathrm{P}(\mathrm{X})) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\mathrm{P}'(\mathrm{X})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E, puis donner sa matrice dans la base canonique de E.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

●○○○ Exercice 6
Considérons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(\mathrm{M}) = \mathrm{AMA}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $f(\mathrm{I}_2)$ et $f(\mathrm{A})$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer son inverse.
4. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en conclure ?
5. Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.
6. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

●○○○ Exercice 7

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$. L'application f est-elle bijective ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

●○○○ Exercice 8

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\forall P(X) \in \mathbb{R}_4[X],\ f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $\ker(f)$ puis $\mathrm{Im}(f)$.

●●○○ Exercice 9 - A la recherche du spectre...

Définitions 1 - Valeurs propres et spectre d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D1# Un réel λ est une **valeur propre** de A lorsque : $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, \left(X \neq 0_{n,1} \text{ ET } AX = \lambda X\right)$.
Un tel vecteur X est appelé **vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.**

D2# Le **spectre de A**, noté $\mathrm{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A.

D3# Si λ est une valeur propre de A, alors l'**espace propre de A associé à λ**, noté $E_\lambda(A)$, est l'ensemble défini par :

$$E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = \lambda X\right\}$$

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. Justifier que $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence des quatre propositions ci-dessous :
   - (i) λ est valeur propre de A
   - (ii) $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \neq n$
   - (iii) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible
   - (iv) $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$
3. Déterminer le spectre de chacune des matrices suivantes.

   3.a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   3.b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   3.c. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   3.d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

   3.e. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   3.f. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   3.g. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   3.h. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

●●○○ Exercice 10 - Type concours

Considérons $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé.

1. Déterminer les réels λ de sorte que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.
2. Soit $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 0\}$. Montrer que E_0 est un espace vectoriel. En donner une base, constituée d'un seul vecteur, noté e_1, dont la première coordonnée vaut 1.
3. Même question avec les ensembles $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = X\}$ et $E_4 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 4X\}$ dont on notera respectivement e_2 et e_3 les vecteurs de leurs bases.
4. Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. Déterminer la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3), on la notera D.
6. Soit P la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre, les vecteurs e_1, e_2 et e_3.
   - 6.a. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
   - 6.b. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
   - 6.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de A^n en fonction de n. Cette expression est-elle encore valable pour $n = 0$?

●●○○ Exercice 11 - Type concours

Soit $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x-2y+3z \\ x+2z \\ 2z \end{pmatrix}$. On note $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de E et donner sa matrice canoniquement associée, notée A.
2. Déterminer les réels λ de sorte que l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ ne soit pas bijectif.
3. Montrer que les ensembles $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\}$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\}$ sont des espaces vectoriels.
4. Justifier que chacun de ces espaces vectoriels possède une base constituée d'un unique vecteur que l'on notera e_1 pour E_1 et e_2 pour E_2. On choisira e_1 de sorte que sa première composante soit 1 et e_2 de sorte que sa deuxième composante soit 1.
5. Déterminer un vecteur e_3 de sorte que $f(e_3) = e_2 + 2e_3$.
6. Justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E ; puis donner la matrice de f dans cette base, notée T.
7. Soit P la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre, les vecteurs e_1, e_2 et e_3.
   - **7.a.** Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
   - **7.b.** Vérifier que $A = PTP^{-1}$.
   - **7.c.** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n en fonction de n.
   - **7.d.** En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
8. Soit $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.
   - **8.a.** Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - **8.b.** Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que :
   $$M \in \mathcal{C}_A \iff TM' = M'T$$
   - **8.c.** Montrer ensuite que M' vérifie $TM' = M'T$ si, et seulement si, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   - **8.d.** En déduire que M appartient à $\mathcal{C}_A$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c tels que : $M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   - **8.e.** Déterminer alors une base de $\mathcal{C}_A$, puis préciser sa dimension.

●●○○ Exercice 12 - Type concours

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, noté f, canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de f. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
2. Montrer que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$, puis déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u} \notin \ker(f)$, $\vec{v} \in \ker(f)$ et $\vec{v} \notin \mathrm{Vect}\big(f(\vec{u})\big)$.
   - **4.a.** Montrer que la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
   - **4.b.** Montrer que la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la matrice de f dans cette base.

●●○○ Exercice 13 - Type concours

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e_0(t) = 1 \ ; \ e_1(t) = t \ ; \ e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

1.
   - **1.a.** Montrer que φ est linéaire.
   - **1.b.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
   - **1.c.** Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2.
   - **2.a.** Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2).
   - **2.b.** Justifier que φ est un automorphisme de E.
   - **2.c.** Déterminer les réels λ de sorte que $\varphi - \lambda \mathrm{id}$ ne soit pas bijectif.
   - **2.d.** Donner le rang de $\varphi - \mathrm{id}$. En déduire la dimension de $\ker(\varphi - \mathrm{id})$.

3. **3.a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2)$.

3.b. En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

3.c. Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

●●○○ Exercice 14 - Type concours

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(\mathrm{M}) = \left({}^t\mathrm{A}\right)\mathrm{M} + \mathrm{MA}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. **2.a.** Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(\mathrm{M})$ est une matrice antisymétrique.

   2.b. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. On considère les trois matrices $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   3.a. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L})$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

   3.b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
4. **4.a.** Calculer $f(\mathrm{J}), f(\mathrm{K})$ et $f(\mathrm{L})$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

   4.b. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$

   4.c. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.

●●●○ Exercice 15 - Type concours

Soit n un entier supérieur ou égal 2 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\vec{v}$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, ..., v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ et qui vérifie $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(\vec{x})$ défini par : $f(\vec{x}) = \vec{x} - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\vec{v}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f \circ f = f$.
3. **3.a.** Montrer que le vecteur $\vec{y}$ appartient à l'image de f si et seulement si $f(\vec{y}) = \vec{y}$.

   3.b. Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.

   3.c. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $(\vec{e}_i - \vec{e}_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

   3.d. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?
4. Déterminer une base du noyau de f.

●●●○ Exercice 16 - Type concours

On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ ainsi que $f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto -3\mathrm{XP}(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^2\mathrm{P}'(\mathrm{X})$.

1. **1.a.** Montrer que f est un endomorphisme de E.

   1.b. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.

   1.c. La matrice M est-elle inversible ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

   1.d. Déterminer une base de $\ker(f)$ puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
   Soient u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_\mathrm{E}$, $u^3 \neq 0_\mathrm{E}$ et $g = \mathrm{id}_\mathrm{E} + u + u^2 + u^3$.

   2.a. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{P} \notin \ker(u^3)$. Montrer que la famille $\left(\mathrm{P}, u(\mathrm{P}), u^2(\mathrm{P}), u^3(\mathrm{P})\right)$ est une base de E.

   2.b. Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

   2.c. Établir l'égalité $\ker(u) = \ker(g - \mathrm{id}_\mathrm{E})$.

●●○○ **Exercice 17** - **Caractérisations de surjectivité / injectivité**
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, ainsi que $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie n et on considère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Démontrer les propriétés suivantes :

1. f est surjective si, et seulement si, $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\right)$ est génératrice de F.
2. f est injective si, et seulement si, $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\right)$ est libre dans F.
3. f est bijective si, et seulement si, $\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\right)$ est une base de F.

●●●○ **Exercice 18** - **Rang et composition**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n ainsi que f, g, h trois endomorphismes de E.
L'objectif de l'exercice est d'établir les trois résultats suivants :

- $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\left(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\right)$.
- Si h est bijectif, alors $\mathrm{rg}(f \circ h) = \mathrm{rg}(f)$.
- Si g est bijectif, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Démontrer le premier résultat.
2. 2.a. Montrer que si h est bijective, alors $\mathrm{Im}(f \circ h) = \mathrm{Im}(f)$.
   2.b. En déduire le second résultat recherché.
3. 3.a. Considérons l'application $g_{|\mathrm{Im}(f)}$: restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.
   Autrement dit :
   $$g_{|\mathrm{Im}(f)} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & G \\ \vec{u} & \longmapsto & g(\vec{u}) \end{array} \right.$$
   Montrer que $g_{|\mathrm{Im}(f)}$ est injective.
   3.b. En déduire le troisième résultat recherché.

●●●● **Exercice 19** - **Rang de la transposée**
Soient $n, p \in [\![2; +\infty[\![$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'objectif de l'exercice est d'établir : $\mathrm{rg}({}^t A) = \mathrm{rg}(A)$.

1. **Résultat préliminaire.**
   Établir :
   $$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left({}^t YY = 0 \iff Y = 0_{n,1}\right)$$
2. *Supposons dans cette question que $n = p$.*
   2.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer : $AX = 0_{n,1} \iff {}^t AAX = 0_{n,1}$.
   2.b. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t AA)$ et que $\mathrm{rg}({}^t A) = \mathrm{rg}(A\,{}^t A)$.
   2.c. Conclure que $\mathrm{rg}({}^t A) = \mathrm{rg}(A)$. *Indication : on pourra utiliser le premier résultat de l'exercice précédent.*
3. Montrer que le résultat est encore vrai dans le cas où $n \neq p$.

Dans les exercices qui suivent, E est un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On notera également $f^2 = f \circ f$.

●○○○ **Exercice 20**
Démontrer que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

●●○○ **Exercice 21** - **Projecteurs**
On suppose que $f^2 = f$. Démontrer que : $y \in \mathrm{Im}(f) \iff f(y) = y$.

●●○○ **Exercice 22** - **Endomorphisme nilpotent**
On suppose que E est de dimension finie égale à n et que f vérifie : $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\left(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\right)$ soit libre.
2. En déduire que $k \leq n$.

●●●○ **Exercice 23** - **Un peu théorique...**

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
2. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}_E\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.