Exercices du chapitre 18
Variables aléatoires discrètes

●○○○ Exercice 1 - Probabilités manquantes

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. On sait de plus que les évènements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ ont même probabilité. Déterminer cette probabilité.

●○○○ Exercice 2 - Paramètre à déterminer

Soit X une variable aléatoire telle que :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\exists a \in \mathbb{R}_*^+ \,/\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = n]) = a\frac{1}{3^n}$

Déterminer a.

●○○○ Exercice 3 - Avec la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, dont la fonction de répartition vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_X(n) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Déterminer la loi de X.

●○○○ Exercice 4

On dispose de trois urnes numérotées 1,2 et 3 constituées de la sorte :

- l'urne 1 contient deux boules blanches
- l'urne 2 contient une boule blanche et une boule rouge
- l'urne 3 contient deux boules rouges

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne au hasard, puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule avec remise, jusqu'à l'éventuelle apparition d'une boule blanche.
Pour $k \in \{1;2;3\}$, on note U_k l'évènement : "on choisit l'urne k".
On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On attribue la valeur 0 à X si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

1. **1.a.** Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
   1.b. En déduire un programme `Python` permettant d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 1000 réalisations de X.
2. **2.a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   2.b. Déterminer $\mathbb{P}_{U_1}([X = 1])$, $\mathbb{P}_{U_2}([X = 1])$ et $\mathbb{P}_{U_3}([X = 1])$.
   2.c. A l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $\mathbb{P}([X = 1])$.
3. Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$. Démontrer que $\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$.
4. Déduire de ce qui précède la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.
5. Justifier que X admet une espérance et une variance et les calculer.
6. Écrire un programme `Python` permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.

●●○○ Exercice 5 - Nombre d'échecs avant premier et deuxième succès

On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans une urne composée de 25% de balles noires et 75% de balles blanches.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de balles blanches tirées avant l'obtention de la première (resp. deuxième) balle noire. On attribue à X la valeur -1 si aucune balle noire n'est tirée ; et à Y la valeur -1 si au plus une balle noire est tirée.
On note également, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k l'évènement "obtenir une balle blanche lors du tirage k".

1. **Loi de X.**
   1.a. Donner $X(\Omega)$.
   1.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}([X = n])$.
   1.c. En déduire $\mathbb{P}([X = -1])$.
   1.d. Justifier que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.
   1.e. Justifier que X admet une variance et la calculer.
2. **Loi de Y.**
   2.a. Donner $Y(\Omega)$.
   2.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}([Y = n])$.
   2.c. n admet que, de la même façon qu'à la question **1.c.**, $\mathbb{P}([Y = -1]) = 0$. Justifier que Y admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.
3. Écrire deux fonctions `Python` permettant de simuler une réalisation des variables aléatoires X et Y.

●●○○ Exercice 6 - Saut en hauteur

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Il ne peut tenter de passer la hauteur $(n+1)$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1, 2, \ldots, n$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le sauteur peut tenter le n-ième saut, la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{1}{n}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : "le sauteur peut tenter et réussit son k-ième saut" et on note X la variable aléatoire donnant le numéro du dernier saut réussi. On attribue à X la valeur 0 si tous les sauts sont réussis.

1. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur $\mathbb{P}([X = n])$.
3. En déduire $\mathbb{P}([X = 0])$.
4. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

●●○○ Exercice 7 - Deux PILE consécutifs

On joue à PILE ou FACE avec une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux PILE consécutifs ; X prendra la valeur 0 si une telle combinaison n'apparaît jamais. Pour $n \in [\![2; +\infty[\![$, on note $p_n = \mathbb{P}([X = n])$.

1. Expliciter les évènements $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$ et donner leurs probabilités.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$,
$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$$
3. En déduire, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'expression de p_n.
4. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.
5. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simul_X()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

●●○○ Exercice 8 - Jusqu'à la balle rouge, avec rajout de balles blanches

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec les règles suivantes :

- si on obtient la boule rouge, on arrête les tirages ;
- sinon, on remet la boule blanche tirée dans l'urne, on ajoute une boule blanche supplémentaire et on recommence.

On note T la variable aléatoire associée au nombre de tirages ainsi effectués. T prendra la valeur 0 si la balle rouge n'est jamais tirée. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: B_k l'évènement "tirer la balle blanche au tirage k" et $R_k = \overline{B_k}$.

1. Soit $i \in [\![2; +\infty[\![$. Déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}([T = n])$.
3. En déduire la probabilité de tirer la balle rouge.
4. T admet-elle une espérance ? Si oui, préciser sa valeur.

●●○○ Exercice 9 - Obtenir chaque face

On lance indéfiniment une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir PILE est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir chacun des deux côtés de la pièce ; et X prend la valeur 0 sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Justifier que X admet une espérance et préciser sa valeur.
3. Soit la variable aléatoire $Y = X(X-1)$.
   - 3.a. Démontrer que Y admet une espérance et préciser sa valeur.
   - 3.b. En déduire que X admet une variance et préciser sa valeur.
4. Écrire une fonction `Python` permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X. En déduire un programme permettant de confirmer les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

●●○○ Exercice 10 - Type concours

Une personne envoie chaque jour un mail codé par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de $0,1$, alors qu'elle est de $0,05$ avec le serveur B.
   - 1.a. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un mail.
   - 1.b. Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

2. Un jour donné, appelé jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBA... signifie que les deux premiers jours, l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3,4,5 il a choisi le serveur B et le jour 6 le serveur A.
Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série BBAAAB...).
On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 celle de la deuxième série.
Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement "le serveur A a été choisi le jour n", et on définit de même l'évènement B_n.
   2.a. Déterminer $\mathbb{P}([L_1 = 2])$.
   2.b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}([L_1 = k]) = 0,3^k \times 0,7 + 0,7^k \times 0,3$$
   2.c. Vérifier que $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}([L_1 = k])$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) = 1$.
   2.d. Montrer que L_1 admet une espérance et la calculer.
   2.e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier soigneusement que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}\Big([L_1 = k] \cap [L_2 = n]\Big) = 0,3^{k+1} \times 0,7^n + 0,7^{k+1} \times 0,3^n$$
   2.f. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, la valeur de $\mathbb{P}([L_2 = n])$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

●●○○ Exercice 11 - Type concours

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On note :

- pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'évènement "obtenir PILE au lancer n" et $F_n = \overline{P_n}$
- X la variable aléatoire qui prend n comme valeur (pour $n \in [\![2;+\infty[\![$) lorsque l'on obtient pour la première fois PILE puis FACE dans cet ordre aux lancers $n-1$ et n. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si une telle combinaison n'arrive jamais.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}([X = 2])$.
3. **Loi de X.**
   3.a. Décrire l'évènement $[X = 3]$ à l'aide des évènements P_k et F_k puis calculer sa probabilité.
   3.b. Écrire, pour $n \in [\![3;+\infty[\![$, l'évènement $[X = n]$ comme union de $n-1$ évènements incompatibles.
   3.c. En déduire : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([X = n]) = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vérifier que cette relation est encore valable pour $n = 2$.
   3.d. Déduire des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$. Interpréter le résultat.
4. Dans cette question, on se propose de retrouver la loi de X par une autre méthode...
   4.a. A l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$,
$$\mathbb{P}([X = n+1]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X = n]) + \frac{1}{2^{n+1}}$$
   4.b. On pose, pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, $u_n = 2^n \mathbb{P}([X = n])$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est arithmétique.
   4.c. En déduire, pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, l'expression $\mathbb{P}([X = n])$.
5. Justifier que X admet une espérance et la calculer.

●●○○ Exercice 12 - Type concours

On réalise une suite de lancers de pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p, avec $p \in]0;1[$, jusqu'à obtenir deux PILE consécutifs.
On note $q = 1 - p$. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du second PILE consécutif.
Par exemple, les lancers FFFPFPFPP donnent $X = 9$.
On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k l'évènement "obtenir PILE au lancer k" et $F_k = \overline{P_k}$.

1. Déterminer les probabilités : $\mathbb{P}([X = 2])$, $\mathbb{P}([X = 3])$ et $\mathbb{P}([X = 4])$.
2. Justifier que $\left(F_1; P_1 \cap F_2; P_1 \cap P_2\right)$ est un système complet d'évènements.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = n+2]) = q\mathbb{P}([X = n+1]) + pq\mathbb{P}([X = n])$.
4. Ici, on suppose que $p = \frac{2}{3}$.
   4.a. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([X = n])$.
   4.b. Justifier que X admet une espérance et une variance. Les calculer. Interpréter le résultat de l'espérance.

●●●○ Exercice 13 - Type concours

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 (l'origine) avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Écrire une fonction Python telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `simul_X(n,p)` renvoie une réalisation de X_n.
2. 2.a. Donner la loi de X_1.
   2.b. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   2.c. En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
   2.d. Justifier que la variable aléatoire T possède une espérance et la calculer.
   2.e. Justifier que la variable aléatoire $T(T-1)$ possède une espérance et la calculer. En déduire que T possède une variance et la déterminer.
3. 3.a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
   3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le système complet d'évènements $\left([X_{n-1} = k]\right)_{0 \le k \le n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.
4. 4.a. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\mathbb{P}([X_n = k-1])$.
   4.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0;n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.
   4.c. Déduire alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
5. 5.a. Montrer que : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.
   5.b. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.
6. 6.a. Montrer, en utilisant la question 4.a., que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$$

   6.b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.
   6.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.
   6.d. Montrer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$$

●●●○ Exercice 14 - Type concours

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   1.a. Démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

   En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n\mathbb{P}([X > n])$$

   1.b. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}([X > k])$ est convergente. Démontrer que X possède une espérance.
   1.c. Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.
   Démontrer alors que la suite $\left(n\mathbb{P}([X > n])\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, puis que la série $\sum \mathbb{P}([X > k])$ est convergente et enfin :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$$

2. **Une application.** On dispose d'une urne contenant N balles indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs et avec remise d'une balle ; et on note X_n la variable aléatoire égale au maximum des nombres obtenus sur ces n tirages.
   Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du i-ème tirage.
   2.a. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Donner la loi de Y_i.
   2.b. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}([X_n \le k])$.
   2.c. En déduire que X_n possède une espérance et l'exprimer sous forme d'une somme.

●●○○ Exercice 15 - Deux inégalités classiques

1. Soit Y est une variable aléatoire réelle à valeurs discrètes positives admettant une espérance $\mathbb{E}(Y)$. Soit a un réel strictement positif. Notons $A = \{\omega \in \Omega \ /\ Y(\omega) \ge a\}$. Considérons la variable aléatoire Z définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   1.a. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
   1.b. Établir : $Z \le Y$.
   1.c. Conclure sur l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}([Y \ge a]) \le \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance et une variance.
   A l'aide de l'inégalité de Markov, établir l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+,\ \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \ge \alpha\right) \le \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$