Exercices du chapitre 16
Probabilités en univers infini

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Des propriétés classiques...

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que A, B, C des évènements de $\mathcal{A}$. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.
   Supposons que $A \subset B$.
   - Montrons que $A \cap B = A$.
     $\boxed{\subset}$ Toujours vraie, par définition de $A \cap B$.
     $\boxed{\supset}$ Soit $\omega \in A$. Puisque $A \subset B$, on a aussi $\omega \in B$.
     Dans ce cas, $\omega \in A$ ET $\omega \in B$.
     Par conséquent : $\omega \in A \cap B$. D'où :
     $$A \subset A \cap B$$
   - Montrons que $A \cup B = B$.
     $\boxed{\supset}$ Toujours vraie, par définition de $A \cap B$.
     $\boxed{\subset}$ Soit $\omega \in A \cup B$.
     Par l'absurde, supposons $\omega \in \overline{B}$. Puisque $\omega \in A \cup B$, on a alors $\omega \in A$. Mais $A \subset B$. D'où : $\omega \in B$: absurde.
     Par conséquent : $\omega \in B$. D'où :
     $$A \cup B \subset B$$

2. Si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$.
   Supposons $A \subset B$.
   Soit $\omega \in A \cap C$. Ainsi : $\omega \in A$ ET $\omega \in C$.
   Mais $A \subset B$. D'où : $\omega \in B$ ET $\omega \in C$. Par conséquent :
   $$\omega \in B \cap C$$
   Conclusion : si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$.

3. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. *On rappelle que :* $B \setminus A = B \cap \overline{A}$.
   Supposons $A \in B$.
   On a :
   $$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$$
   Remarquons alors que :
   - $$\begin{aligned} A \cup (B \setminus A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) && \text{distributivité de } \cup \text{ sur } \cap \\ &= (A \cup B) \cap \Omega \\ &= A \cup B \\ &= B && A \subset B \end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} A \cap (B \setminus A) &= A \cap (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cap B && \text{associativité et commutativité de } \cap \\ &= \varnothing \cap B \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

   A et $B \setminus A$ sont donc incompatibles.
   Par conséquent :
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \end{aligned}$$
   Et ainsi :
   $$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$$
   Conclusion : si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

> **L'idée...**
> Pour terminer, il suffirait que $B = A \cup (B \setminus A)$, et que A et $B \setminus A$ soit incompatibles...

●●○○ Exercice 2 - Vrai ou faux

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

1. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n est quasi-certain, alors $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ est quasi-certain.
   VRAI
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n est quasi certain. On a ainsi $\mathbb{P}(A_n) = 1$.
   Mais : $A_n \subset \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$.
   D'où :
   $$\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq 1$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$$

2. Si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$.

VRAI
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq 1$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$... D'où, par théorème d'encadrement :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$$

Petite remarque
$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$ ne dépend pas de n...

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

VRAI
Démontrons ce résultat par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{0} A_k\right) = \mathbb{P}(A_0)$ et $\sum_{k=0}^{0} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_0)$... D'où l'initialisation.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ et montrons $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(A_k)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) && \text{formule de Poincaré}\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) && \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \geq 0\\
&\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) && \text{hypothèse de récurrence}\\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1})\\
&\leq \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(A_k)
\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

➠Réflexe!
On sait, d'après la formule de Poincaré, que le résultat est vrai pour une union de 2 évènements... Et : "si c'est vrai pour 2, alors..."

●○○○ Exercice 3

Une urne contient trois balles blanches et une balle noire. On effectue des tirages successifs et avec remise d'une balle dans cette urne, jusqu'à obtenir la balle noire. On note :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, B_n" : "on tire une balle blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage";
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n" : "le jeu s'arrête à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage";
- F : "on effectue un nombre fini de tirages".

1. Justifier que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles.
Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$ tels que $i \neq j$.
L'évènement $F_i \cap F_j$ est réalisé si, et seulement si, le jeu s'arrête à l'issue du i-ème et du j-ème tirage... Ce qui est impossible.
Ainsi :

$$F_i \cap F_j = \varnothing$$

Conclusion : $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement F_n à l'aide des évènements B_i et leurs contraires, avec $i \in [\![1;n]\!]$.
   - On a :

F_1 est réalisé	si, et seulement si,	le jeu s'arrête à l'issue du premier tirage
	si, et seulement si,	on obtient la balle noire au premier tirage

D'où :

$$F_1 = \overline{B_1}$$

- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

F_n est réalisé	si, et seulement si,	le jeu s'arrête à l'issue du n-ième tirage
	si, et seulement si,	on obtient des balles blanches des tirages 1 à $n-1$, puis une balle noire au tirage n

D'où :

$$F_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \cap \overline{B_n}$$

3. Exprimer F en fonction des évènements de la famille $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis en déduire $\mathbb{P}(F)$.
   - On a :

F est réalisé	si, et seulement si,	on effectue un nombre fini de tirages
	si, et seulement si,	il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que F_n est réalisé

Ainsi :

$$F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

- Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) && \text{question 1.}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n) && \text{question précédente}\\
&= \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \cap \overline{B_n}\right) && \text{indépendance des tirages, car avec remise}\\
&= \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_i)\right) \times \mathbb{P}(B_n) && \text{équiprobabilité du choix des balles}\\
&= \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4} && \text{linéarité de la somme et changement d'indice } k = n-1\\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k}\\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{3}{4}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Petite remarque
Les deux cas peuvent se regrouper si on prend comme convention : $\bigcap_{i\in\varnothing} B_i = \Omega$.
De façon générale, on peut prendre les conventions suivantes :
- une somme indexé sur un ensemble vide vaut le neutre de l'addition : 0
- un produit indexé sur un ensemble vide vaut le neutre de la multiplication : 1
- une union indexée sur un ensemble vide vaut le neutre de l'union : $\varnothing$
- une intersection indexée sur un ensemble vide vaut le neutre de l'intersection : l'ensemble ambiant

Même si, l'idée reste toujours de faire la disjonction...

☞ Rappel...
$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \iff \exists n \in \mathbb{N}^* / \omega \in F_n$

Pourquoi ?
$\frac{1}{4}$ est égal au terme quand $n = 1$ de la somme...

Petite remarque
Le jeu s'arrêtera presque-sûrement.

●●○○ Exercice 4 - Jeu à trois joueurs...

Anne-Apolline, Bertrand-Bernard et Claire-Charlotte lancent successivement un dé équilibré à 6 faces. Anne-Apolline joue, puis Bertrand-Bernard, puis Claire-Charlotte, puis à nouveau Anne-Apolline,... Le premier à obtenir 6 gagne la partie. On suppose les lancers de dés mutuellement indépendants. Calculer, pour chaque joueur, la probabilité de gagner la partie.

Considérons les évènements suivants :

- A : "Anne-Apolline gagne la partie"; de même, on définit B et C.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, D_k : "le premier 6 est obtenu au lancer k",
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: S_k : "obtenir 6 au lancer k".

Ensuite :

- ◇ $D_1 = S_1$ et ainsi, le dé étant équilibré :

$$\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{6}$$

  ◇ Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$.

D_k est réalisé	si, et seulement si,	on obtient le premier 6 au lancer k
	si, et seulement si,	on obtient "pas 6" aux lancers 1 à $k-1$ et 6 au lancer k

D'où :

$$D_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{S_i}\right) \cap S_k$$

Par indépendance des lancers du dé et par équiprobabilité de chacune des faces, on obtient :

$$\mathbb{P}(D_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

Les deux cas peuvent se regrouper et on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(D_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

- On a :

Pourquoi ?
On distingue les deux cas, car dans l'évènement D_1, on n'obtient pas de "non 6"...

A est réalisé	si, et seulement si,	Anne-Apolline gagne la partie
	si, et seulement si,	le premier 6 est obtenu au lancer 1, ou au lancer 4, ou au lancer 7, ou ...
	si, et seulement si,	il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le premier 6 est obtenu au lancer $3n+1$

D'où :

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} D_{3n+1}$$

☞ Rappel...

$$\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} D_{3n+1} \iff \exists n \in \mathbb{N} / \omega \in D_{3n+1}$$

Or, la famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles (impossible d'obtenir le premier 6 à deux lancers différents), d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \frac{1}{6} \quad \text{linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5^3}{6^3}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{5^3}{6^3}} \\
&= \frac{6^2}{6^3-5^3} \\
&= \frac{36}{216-125} \\
&= \frac{36}{91}
\end{aligned}$$

- De la même façon :

$$B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} D_{3n+2}$$

Et on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \frac{5}{6}\mathbb{P}(A) \\
&= \frac{30}{91}
\end{aligned}$$

- Et :

$$C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} D_{3n+3}$$

Et on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \frac{5^2}{6^2}\mathbb{P}(A) \\
&= \frac{25}{91}
\end{aligned}$$

Petite remarque

En notant E l'évènement "la partie ne s'arrête jamais", la famille (A, B, C, E) est un système complet d'évènements... Et on trouve alors : $\mathbb{P}(E) = 0$.

●●○○ Exercice 5 - Probabilités & suites

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\frac{2}{3}$.

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer. On note :

- pour tout entier $n \geq 1$, F_n l'évènement "on obtient FACE au n-ième lancer" et $P_n = \overline{F_n}$,
- pour tout entier $n \in [\![2;+\infty[\![$, D_n l'évènement "on obtient un double PILE au rang n **pour la première fois**",
- pour tout entier $n \in [\![2;+\infty[\![$, $d_n = \mathbb{P}(D_n)$. On conviendra que $d_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

"PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE"

alors l'évènement D_8 est réalisé.

1. Calculer d_2 et d_3.
   - L'évènement D_2 est réalisé si, et seulement si, on obtient PILE aux lancers 1 et 2. D'où :

$$D_2 = P_1 \cap P_2$$

   Puis, par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_2) &= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

   - Aussi :

D_3 est réalisé	si, et seulement si,	on obtient le premier double-PILE au rang 3
	si, et seulement si,	on obtient FACE au lancer 1 puis PILE aux lancers 2 et 3

D'où :

$$D_3 = F_1 \cap P_2 \cap P_3$$

Puis, par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_3) &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

Conclusion : $d_2 = \dfrac{4}{9}$ et $d_3 = \dfrac{4}{27}$.

2. Pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, justifier que : $\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}) = d_{n+1}$.

Supposons l'évènement F_1 réalisé. Autrement dit, le premier lancer a donné FACE.
Dans ce cas :

D_{n+2} est réalisé	si, et seulement si,	les lancers 2 à n+2 terminent par le premier double-PILE
	si, et seulement si,	on obtient le premier double-PILE au bout de $n+1$ lancers

En gros... La probabilité d'obtenir le premier double-PILE à l'issue des N premiers lancers est égale à la probabilité d'obtenir le premier double-PILE **en** N lancers.

Par conséquent :

$$\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}) = \mathbb{P}(D_{n+1})$$

Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}) = d_{n+1}$.

3. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Établir : $\mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) = \dfrac{1}{3}d_n$.

Supposons l'évènement P_1 réalisé. Autrement dit, le premier lancer a donné PILE.
Puisque $n \geq 2$, on a $n+2 \geq 4$. Ainsi, il est impossible d'avoir un autre PILE au lancer 2.
Dans ce cas :

D_{n+2} est réalisé	si, et seulement si,	on obtient FACE au lancer 2, puis les lancers 3 à n+2 terminent par le premier double-PILE

Notons alors $\widetilde{D_{n+2}}$ l'évènement "les lancers 3 à n+2 terminent par le premier double-PILE". Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) &= \mathbb{P}(F_2 \cap \widetilde{D_{n+2}}) \\ &= \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(\widetilde{D_{n+2}}) \end{aligned}$$

par indépendance des lancers

Mais :

$\widetilde{D_{n+2}}$ est réalisé	si, et seulement si,	les lancers 3 à n+2 terminent par le premier double-PILE
	si, et seulement si,	on obtient le premier double-PILE au bout de n lancers

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(\widetilde{D_{n+2}}) = \mathbb{P}(D_n) = d_n$$

Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) = \dfrac{1}{3}d_n$.

4. En déduire : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $d_{n+2} = \dfrac{1}{3}d_{n+1} + \dfrac{2}{9}d_n$. Vérifier que cette égalité est encore vraie pour $n = 1$.

- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.
  D'après la formule des probabilités totales, avec (P_1, F_1) comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_{n+2}) &= \mathbb{P}(P_1 \cap D_{n+2}) + \mathbb{P}(F_1 \cap D_{n+2}) \\ &= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}) \\ &= \frac{2}{9}d_n + \frac{1}{3}d_{n+1} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(P_1) \neq 0$, $\mathbb{P}(F_1) \neq 0$

questions précédentes

- Pour $n = 1$:
  D'après la question **1.** :

$$\begin{aligned} \frac{2}{9}d_1 + \frac{1}{3}d_2 &= \frac{1}{3}\frac{4}{9} \\ &= \frac{4}{27} \\ &= d_3 \end{aligned}$$

La relation est donc encore valable pour $n = 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+2} = \dfrac{1}{3}d_{n+1} + \dfrac{2}{9}d_n$.

5. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de d_n en sortie.

Deux propositions :

```python
def suite_d(n): #récursive
    if n==1:
        return 0
    elif n==2:
        return 4/9
    else:
        return 1/3*suite_d(n-1)+2/9*suite_d(n-2)

def suite_d_bis(n): #itérative
    if n==1:
        return 0
    elif n==2:
        return 4/9
```

```
    else :
        a,b=0,4/9
        for k in range(3,n+1):
            a,b=b,1/3*b+2/9*a
        return b
```

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$.

Deux méthodes possibles :

- Méthode habituelle sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2...
- Récurrence double.

Important !
A faire, pour confirmer que tous les points seraient obtenus sur cette question.

7. Calculer la probabilité de l'évènement $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ puis interpréter le résultat obtenu.

Puisqu'il est impossible d'obtenir le premier double-PILE à deux rangs différents, la famille $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constituée d'évènements deux à deux incompatibles.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} D_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) && \text{par linéarité, puisque } \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ et } \sum_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ sont convergentes} \\
&= \frac{4}{9}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) && \text{changement d'indice } k = n-1 \\
&= \frac{4}{9}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) \\
&= \frac{4}{9}\left(3 - \frac{3}{4}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

✓ Rigueur !
La linéarité sur les sommes infinies n'est valable qu'en cas de convergence ! Sinon, on arrive vite à écrire n'importe quoi...

Conclusion : l'évènement $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ est quasi-certain.
Nous obtiendrons presque-sûrement un double-PILE (à un certain moment).

●●○○ Exercice 6

On dispose d'une urne contenant une balle blanche et une balle noire. On effectue une succession de tirages de la sorte : on prélève une balle, on note sa couleur et on la remet dans l'urne, accompagnée de 2 autres balles de la même couleur. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : "les n premiers tirages n'ont donné que des balles blanches". Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}(A_n)$.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k l'évènement "obtenir une balle blanche au tirage k".
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$A_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) && \text{formule des probabilités composées, puisque } \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}) \neq 0 \\
&= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(B_n)
\end{aligned}$$

Or :

- Par équiprobabilité du choix des balles : $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$
- Soit $k \in [\![2;n]\!]$. Déterminons $\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}(B_k)$.
Supposons l'évènement $B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}$ réalisé. Autrement dit, on a tiré successivement $k-1$ balles blanches de l'urne, et ainsi, $2 \times (k-1)$ balles blanches ont été ajoutées. L'urne est alors composée de $2k-1$ balles blanches et d'une balle noire.
Et dans ce cas, l'évènement B_k est réalisé si, et seulement si, on tire une des $2k-1$ balles blanches parmi les $2k$ balles au total. Par équiprobabilité du choix des balles, on a alors :

$$\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{2k-1}{2k}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(B_n) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n}{2n} \\
&= \frac{1}{2^n \times 2^n}\,\frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{2} \times \ldots \times \frac{2n-1}{n} \times \frac{2n}{n} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

Remarque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On avait :

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

Or, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{2k-1}{2k} > 0$, d'où :

$$\begin{aligned} \ln\left(\mathbb{P}(A_n)\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k-1}{2k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\forall k \in [\![1;+\infty[\![,\ \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq \frac{-1}{2k}$$

D'où :

$$\forall k \in [\![1;+\infty[\![,\ -\ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \geq \frac{1}{2k} \geq 0$$

Puis, en sommant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} -\ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Mais, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles d'une série à terme général positif divergente (série de Riemann dexposant $\alpha = 1$ / ou série harmonique), par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

Par théorème de comparaison, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} -\ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) = +\infty$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) = -\infty$$

Et, par composition, on a finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

La probabilité de ne tirer indéfiniment que des balles blanches est nulle.

À retenir...
La suite des sommes partielles d'une série à terme général positif divergente diverge vers $+\infty$.

☞ Pour info...
Résultat à mettre en parallèle avec la fin de l'exercice 11...

●●○○ Exercice 7

On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier PILE. Si n désigne le nombre de lancers effectués, on tire ensuite une balle dans une urne composée d'une balle blanche et de $n-1$ balles noires. Si aucun PILE n'est obtenu, l'expérience s'arrête. Quelle est la probabilité de tirer une balle blanche ? *On admet que pour tout $x \in [0;1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ est convergente de somme* $\ln(1-x)$.

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'évènement "obtenir PILE au lancer n", A_n l'évènement "le premier PILE est tiré au tirage numéro n" et B l'évènement "obtenir la balle blanche". Notons également A_0 l'évènement "aucun PILE n'est obtenu".

- D'après la formule des probabilités totales, avec $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n \cap B)$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) && \text{car } A_0 \cap B = \varnothing \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B) && \text{équiprobabilité du choix des balles dans l'urne} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

- Déterminons maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(A_n)$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - On a :
  $$A_1 = P_1$$
  Donc :
  $$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$$
  - Si $n \geq 2$:
  $$A_n = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \ldots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n$$
  D'où, par indépendance des lancers :
  $$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}$$

Les deux cas peuvent se grouper, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}$$

> **Petite remarque**
> On pourrait alors calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$... On trouverait qu'elle vaut 1. Et comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un sce, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$.
> Ce qui fournit : $\mathbb{P}(A_0) = 0$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{n} && \text{énoncé} \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité que le joueur tire une balle blanche est $\ln(2) \simeq 0,7$.

●●○○ Exercice 8

On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier PILE. Si n désigne le nombre de lancers effectués, on tire ensuite au hasard une balle dans une urne composée de 2^n balles dont n sont blanches. Si aucun PILE n'est obtenu, l'expérience s'arrête. Quelle est la probabilité de tirer une balle blanche ?

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'évènement "obtenir PILE au lancer n", A_n l'évènement "le premier PILE est tiré au tirage numéro n" et B l'évènement "obtenir la balle blanche". Notons également A_0 l'évènement "aucun PILE n'est obtenu".

- D'après la formule des probabilités totales, avec $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n \cap B)$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) && \text{car } A_0 \cap B = \varnothing \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B) && \text{équiprobabilité du choix des balles dans l'urne} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \frac{n}{2^n} \end{aligned}$$

- Déterminons maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(A_n)$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - On a :
  $$A_1 = P_1$$
  Donc :
  $$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$$
  - Si $n \geq 2$:
  $$A_n = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \ldots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n$$
  D'où, par indépendance des lancers :
  $$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}$$

  Les deux cas peuvent se grouper, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}$$

> **Petite remarque**
> On pourrait alors calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$... On trouverait qu'elle vaut 1. Et comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un sce, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$.
> Ce qui fournit : $\mathbb{P}(A_0) = 0$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{n}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité de tirer une balle blanche est $\dfrac{4}{9}$.

●●●○ Exercice 9 - Lancer de dé

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- A_n l'évènement "obtenir 2 ou 4 au lancer n"
- B_n l'évènement "obtenir 6 au lancer n"
- $C_1 = B_1$ et si $n \in [\![2;+\infty[\![$: $C_n = A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n$.
  Pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, l'évènement C_n est réalisé si, et seulement si, on a obtenu que des 2 ou 4 aux $n-1$ premiers lancers et le premier 6 au lancer n.

On cherche alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right)$.
Puisque le premier 6 ne peut apparaître à deux lancers différents, les évènements de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles. D'où :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n)$$

Or :

$$\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{6}$$

et pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_n) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n) && \text{indépendance des lancers} \\
&= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{n-1}) \times \mathbb{P}(B_n) && \text{le dé est équilibré} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Cette relation étant encore valable pour $n = 1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(C_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6} && \text{changement d'indice } k = n-1 \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité de n'obtenir que des nombres pairs jusqu'à l'obtention du premier 6 est égale à $\frac{1}{4}$.

●●●○ Exercice 10 - Tirage d'un entier au hasard

On tire au hasard un entier strictement positif et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir n est égale à $\frac{1}{2^n}$.

1. Vérifier que l'on a ainsi défini une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
   - On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geq 0$.
   - De plus, la série $\sum_{n\geq 1} p_n$ est une troncature d'une série géométrique convergente (car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$) ; elle est donc également convergente, et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k : "le nombre tiré est multiple de k".

   2.a. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
   Notons, pour $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "le nombre tiré est i", qui est ainsi de probabilité p_i.

   - On a :
     L'évènement A_k est réalisé si, et seulement si, le nombre tiré est multiple de k
     si, et seulement si, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que le nombre tiré est kj

     On a ainsi :

$$A_k = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_{jk}$$

   - Or, la famille $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles, d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{jk}) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{jk}} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^j \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} - 1 \\
&= \frac{2^k}{2^k-1} - 1 \\
&= \frac{1}{2^k-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{2^k - 1}$.

2.b. Calculer la probabilité des évènements : $A_2 \cup A_3$, $A_2 \cup A_4$ et $A_4 \cup A_6$.

- On a : $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3)$ Mais :
$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{3} \;\; ; \;\; \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{7}$$
Et de plus, l'évènement $A_2 \cap A_3$ est réalisé si, et seulement si, l'entier obtenu est multiple de 2 et de 3, si, et seulement si, il est multiple de 6.
Donc $A_2 \cap A_3 = A_6$ et ainsi :
$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_6) = \frac{1}{63}$$
D'où :
$$\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \frac{29}{63}$$
- On remarque que $A_4 \subset A_2$... Donc $A_2 \cup A_4 = A_2$.
Par conséquent :
$$\mathbb{P}(A_2 \cup A_4) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{3}$$
- On a : $\mathbb{P}(A_4 \cup A_6) = \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_6) - \mathbb{P}(A_4 \cap A_6)$ Mais :
$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{15} \;\; ; \;\; \mathbb{P}(A_6) = \frac{1}{63}$$
Et de plus, l'évènement $A_4 \cap A_6$ est réalisé si, et seulement si, l'entier obtenu est multiple de 4 et de 6, si, et seulement si, il est multiple de 12.
Donc $A_4 \cap A_6 = A_{12}$ et ainsi :
$$\mathbb{P}(A_4 \cap A_6) = \mathbb{P}(A_{12}) = \frac{1}{4095}$$
D'où :
$$\mathbb{P}(A_4 \cup A_6) = \frac{1}{15} + \frac{1}{63} - \frac{1}{4095} = \frac{337}{4095}$$

2.c. Soient $k, p \in [\![2;+\infty[\![$, distincts. Montrer que les évènements A_k et A_p ne sont pas indépendants.

Soient $k, p \in [\![2;+\infty[\![$. Notons q le ppcm de k et p (le plus petit multiple commun). On a ainsi :
$$A_k \cap A_p = A_q$$
Raisonnons maintenant par l'absurde et supposons que A_k et A_p sont indépendants. Dans ce cas, on a :
$$\mathbb{P}(A_k \cap A_p) = \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(A_p)$$
Ce qui donne :
$$\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(A_p)$$
C'est à dire :
$$\frac{1}{2^m - 1} = \frac{1}{2^k - 1} \times \frac{1}{2^p - 1}$$
et donc :
$$2^m - 1 = (2^k - 1)(2^p - 1)$$
D'où :
$$2^m - 1 = 2^{k+p} - 2^p - 2^k + 1$$
Et ainsi :
$$2^m - 2^{k+p} + 2^k + 2^p = 2$$
Mais, chaque terme de la somme de gauche est divisible par 4, car $k, p, m \geq 2$, donc $2^m - 2^{k+p} + 2^k + 2^p$ est divisible par 4 : impossible car ce nombre vaut 2.

Conclusion : Pour $k, p \geq 2$, les évènements A_k et A_p ne sont pas indépendants.

●●●○ Exercice 11 - Théorème de limite monotone

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

1. **Question préliminaire.** Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.

   Établir : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$.

   Raisonnons pas double-inclusion.

   $\boxed{\subset}$ Soit $\omega \in \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$.
   Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$.
   Par conséquent :
$$\omega \in \bigcup_{k=0}^{n} A_k$$
   Or $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$. Il existe donc $m \in [\![0;n]\!]$ tel que $\omega \in B_m$.
   Mais alors :
$$\omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$$

$\boxed{\supset}$ De la même façon... Ou en évoquant la symétrie des rôles des suites (A_n) et (B_n).

Conclusion : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$.

2. On suppose dans cette question que la suite (A_n) est croissante (au sens de l'inclusion), autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$.

2.a. Démontrer que la suite $\big(\mathbb{P}(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.
Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A_{n+1})$$

La suite $\big(\mathbb{P}(A_n)\big)$ est donc croissante. De plus, elle est majorée par 1.

Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, la suite $\big(\mathbb{P}(A_n)\big)$ est convergente.

2.b. Définissons une nouvelle suite d'évènements par : $\begin{cases} B_0 = A_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n = A_{n+1} \cap \overline{A_n} \end{cases}$.

2.b.i. Démontrer que la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'évènements deux à deux incompatibles.

- Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$ tels que $i < j$. On a :

$$\begin{aligned} B_i \cap B_j &= (A_i \cap \overline{A_{i-1}}) \cap (A_j \cap \overline{A_{j-1}}) && \text{associativité et commutativité de } \cap \\ &= A_i \cap A_j \cap \overline{A_{i-1}} \cap \overline{A_{j-1}} && A_i \subset A_j \text{, donc } A_i \cap A_j = A_i \\ &= A_i \cap \overline{A_{i-1}} \cap \overline{A_{j-1}} && A_{i-1} \subset A_{j-1} \text{, donc } \overline{A_{j-1}} \subset \overline{A_{i-1}} \\ &= A_i \cap \overline{A_{j-1}} \end{aligned}$$

Or $i \leq j-1$, donc $A_i \subset A_{j-1}$ et ainsi, $\overline{A_{j-1}} \subset \overline{A_i}$.
Par conséquent : $A_i \cap \overline{A_{j-1}} \subset A_i \cap \overline{A_i} = \varnothing$.
D'où :

$$A_i \cap \overline{A_{j-1}} = \varnothing$$

Et ainsi :

$$B_i \cap B_j = \varnothing$$

- De même, on trouve que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $B_0 \cap B_j = \varnothing$.

Conclusion : la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'évènements deux à deux incompatibles.

Pourquoi ?
Pour pouvoir écrire $B_i = A_i \cap \overline{A_{i-1}}$, il faut que $i-1 \geq 0$...

2.b.ii. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n$, puis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k$.

- Puisque (A_n) est une suite croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n$.

- Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$.

  - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
    Immédiat, car $B_0 = A_0$.

  - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$ et montrons que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n+1} B_k = A_{n+1}$.

    On a :

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=0}^{n+1} B_k &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A_n \cup (A_{n+1} \cap \overline{A_n}) && \text{distributivité de } \cup \text{ sur } \cap \\ &= (A_n \cup A_{n+1}) \cap (A_n \cup \overline{A_n}) && A_n \subset A_{n+1} \text{, donc } A_n \cup A_{n+1} = A_{n+1} \\ &= A_{n+1} \cap \Omega \\ &= A_{n+1} \end{aligned}$$

    L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.

2.b.iii. Déduire des questions précédentes : $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

D'après la question précédente, on a :

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$$

Donc, par incompatibilité deux à deux des évènements de la famille (B_n), on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) && \text{1.b.ii} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) && (B_n) \text{ est constituée d'évènements 2 à 2 incompatibles} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) \end{aligned}$$

Petite remarque

On peut aussi remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(A_n)$.

En passant à la limite (puisque $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(B_k)$ est convergente), on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

3. En considérant la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, déduire de la question précédente : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$.

Attention !

Retour au cas général, (A_n) n'est plus nécessairement une suite croissante !

La suite (C_n) est croissante, car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = C_n \cup A_{n+1}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n \subset C_{n+1}$$

Ainsi, en appliquant le résultat de la question précédente à la suite (C_n), on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$$

Mais, comme (C_n) est croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k=0}^{n} C_k = C_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$$

Ainsi, d'après la question **1.** :

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$$

On déduit donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$.

4. Démontrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (au sens de l'inclusion), alors : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Supposons que (A_n) est décroissante. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n = \overline{A_n}$. Dans ce cas, la suite (C_n) est croissante et ainsi, d'après le résultat obtenu à la question **2.** :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k}\right) && \text{loi de Morgan} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \overline{C_k}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \end{aligned}$$

Et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(C_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n)$, on obtient :

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n))$$

Conclusion : si la suite (A_n) est décroissante, alors : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

5. Déduire enfin : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$

Deux méthodes :

- Analogue à la question précédente, en utilisant le résultat de la question **3.**.
- Analogue à la question **2.** (en posant $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$), en utilisant la question précédente.

6. **Application 1.** Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'évènements indépendants de probabilité $p \in]0;1[$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 0$.

Soit (A_n) une suite d'évènements mutuellement indépendants, de même probabilité $p \in]0;1[$.

- Par indépendance, on a , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\ &= p^n \end{aligned}$$

- D'après le résultat de la question **5.**, on a alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} p^n$$

Et comme $p \in]0;1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty} p^n = 0$.

Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 0$$

Conclusion : si les évènements A_n sont indépendants et de même probabilité $p \in]0;1[$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$.

7. **Application 2.** Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on double le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n : "les n premiers tirages ont lieu et ne donnent que des boules blanches", et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$.

7.a. Justifier la convergence de la suite (b_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_{n+1} \subset B_n$; d'où $b_{n+1} \leq b_n$.
La suite (b_n) est donc décroissante, et minorée par 0.

Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, (b_n) est convergente.

7.b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

Puisque (B_n) est décroissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}(B_n) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(B_n) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_k}(B_{k+1}) \end{aligned}$$

formule des probabilités composées

Or :

- Par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne : $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$.
- Ensuite, soit $k \in [\![1;n-1]\!]$.
Supposons l'évènement $B_1 \cap \ldots \cap B_k$ réalisé. Autrement dit, les tirages 1 à k ont donné une balle blanche ; et, à chaque fois, le nombre de balles blanches a été doublé.
Ainsi, lors du $(k+1)$-ième tirage, l'urne est composée de 2^k balles blanches et 1 balle noire. D'où, par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne :

$$\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_k}(B_{k+1}) = \frac{2^k}{1+2^k}$$

En reprenant où nous en étions :

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}(B_1)\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_k}(B_{k+1}) \\ &= \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2^k}{2^k+1} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{1+2^k} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{1+2^k}$.

7.c. On note B : "l'expérience ne s'arrête jamais".

7.c.i. Justifier que $\mathbb{P}(B)=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

L'évènement B est réalisé si, et seulement si, la boule noire n'est jamais tirée. Ainsi :

$$B=\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n$$

Et d'après le résultat de la question **5.**, on obtient le résultat voulu.

7.c.ii. Démontrer que la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ est convergente. On note α sa somme.

- On sait que pour tout $x>-1$, $\ln(1+x)\leq x$. Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$ (puisque $\frac{1}{2^k}>-1$) :

$$0\leq \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leq\frac{1}{2^k}$$

- La série $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique convergente (car $\frac{1}{2}\in]-1,1[$).

Conclusion : par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ est convergente.

7.c.iii. Exprimer $\mathbb{P}(B)$ en fonction de α. L'évènement B est-il quasi-impossible ?

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $b_n>0$, et donc :

$$\begin{aligned} \ln(b_n) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{1+2^k}\right) \qquad \forall k\in[\![0;n-1]\!],\ \frac{2^k}{1+2^k}>0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{2^k}{1+2^k}\right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{2^k+1}{2^k}\right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)=-\alpha$.

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(b_n)=-\alpha$$

et ainsi, par composition de limite :

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=e^{-\alpha}$$

Conclusion : d'après la question **7.c.i**, on obtient : $\mathbb{P}(B)=e^{-\alpha}$.
Ainsi, $\mathbb{P}(B)>0$: l'évènement B n'est pas quasi-impossible.

☞ POUR INFO...
Résultat à mettre en parallèle avec l'exercice 6...