Devoir surveillé 4
Samedi 21 janvier 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Je crois beaucoup en la chance, et je constate que plus je travaille, plus elle me sourit."
Thomas Jefferson

n est un entier naturel non nul, X et Y sont des variables aléatoires sur un certain univers Ω, à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, $\omega \in \Omega$.

1. $\mathbb{P}(X)$: HORREUR
2. $[X=0]$: évènement (ensemble d'issues)
3. $X(\Omega)$: ensemble de réels
4. $X(\omega)$: réel
5. $[X=1]+[X=2]$: HORREUR
6. X^2 : variable aléatoire
7. $\bigcap_{k=0}^{n}[X=k]$: évènement
8. $\mathbb{P}([X=0])\cap\mathbb{P}([X=1])$: HORREUR
9. $\mathbb{P}_{[X=0]}\big([X=1]\cup[X=2]\big)$: réel
10. $\mathbb{P}([X+Y=2])$: réel
11. $\mathbb{E}([X=1])$: HORREUR
12. $\mathbb{E}(X^2)$: réel

Rappels :

- Une probabilité $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ vérifiant deux conditions. On ne calcule donc la probabilité que d'un **évènement**. La probabilité d'un évènement est un réel de $[0;1]$.
- Une variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$: à chaque issue, elle associe un réel. La notation $[X=1]$ désigne l'ensemble des issues dont l'image par X est égale à 1 (en écriture mathématique : $[X=1]=\{\omega\in\Omega\ /\ X(\Omega)=1\}$) : c'est un évènement. Les opérations habituelles sur les ensembles ont donc du sens sur les évènements : union, intersection, contraire.

Exercice 1

On considère la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire une fonction Python telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de `suite_h(n)` renvoie la valeur de h_n.
   Deux possibilités :

```python
def suite_h(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k
    return S

def suite_h_bis(n):
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    return sum(L)
```

Petite remarque
Dans le premier programme, il est aussi possible d'initialiser avec `S=1` et, dans ce cas, la ligne suivante est `for k in range(2,n+1):`.

2. **Étude de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

   2.a. Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

   Par conséquent : $h_{n+1} > h_n$.

   Conclusion : la suite (h_n) est strictement croissante.

   2.b. Démontrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$, définie $]-1;+\infty[$.
   Posons également $u : x \longmapsto 1+x$ de sorte qu $f = \ln \circ u - \mathrm{id}$.
   La fonction u est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs strictement positives sur cet intervalle ; donc $\ln \circ u$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$. Ainsi, f est une somme de deux fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$, elle l'est donc également. Soit $x \in]-1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

   D'où :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	0	↘	

Petite remarque
Les limites ne sont pas demandées, et ne sont pas nécessaires...

   On en déduit que f possède un maximum sur $]-1;+\infty[$ égal à 0, atteint en 0.

   Conclusion : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

   2.c. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geq \ln(n+1)$. Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{1}{k} \geq 0$, on peut utiliser le résultat établi ci-dessus et obtenir ainsi : $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

     Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (donc pour tout $k \in [\![1;n]\!]$) :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

     En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

     Autrement dit :

$$h_n \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

✍ Rédaction
Je quantifie le k avec "pour tout $k \in$ ..." : c'est une quantification qui n'est valable que pour la ligne de calculs en cours. C'est approprié ici, puisque le k devient muet à la ligne suivante.

Or, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &\underset{\text{RÉFLEXE !}}{=} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&\underset{\text{RÉFLEXE !}}{=} \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1)-\ln(k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \qquad \text{télescopage} \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geq \ln(n+1)$.

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \geq \ln(n+1)$; de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

Conclusion : par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$.

3. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = h_n - \ln(n) \ ;\ v_n = h_n - \ln(n+1)$$

3.a. A l'aide du résultat de la question 2.b., établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Inégalité de gauche.**
  Remarquons déjà que :

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Or, d'après le résultat de la question 2.b., avec $x = \dfrac{1}{n+1} > -1$ (car $n > 0$), on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

Conclusion :

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

- **Inégalité de droite.**
  Remarquons déjà que :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= -\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \\
&= -\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après le résultat de la question 2.b., avec $x = \dfrac{-1}{n+1} > -1$ (car $n > 0$), on obtient :

$$\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{-1}{n+1}$$

D'où :

$$-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}$$

Conclusion :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

3.b. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers la même limite, notée γ.

IMPORTANT ! L'énoncé le dit, mais il ne le dit pas comme ça !

Pour cela, démontrons qu'elles sont adjacentes.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} - \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad \text{question précédente} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= h_{n+1} - \ln(n+2) - (h_n - \ln(n+1)) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \\
&= \frac{1}{n+1} - \Big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \qquad \text{question précédente} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{array}{rcl} u_n - v_n & = & h_n - \ln(n) - h_n + \ln(n+1) \\ & = & \ln(n+1) - \ln(n) \\ & = & \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \\ & = & \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \end{array}$$
Ainsi, par composition :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

On a :

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$

Par conséquent, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Conclusion : les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, notée γ.

☞ POUR INFO...
γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.
On a ainsi, pour n suffisamment grand : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \simeq \ln(n) + \gamma$.

3.c. Établir :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$$
On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = u_n + \ln(n)$$
D'où, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$ (ainsi $\ln(n) \neq 0$) :
$$\frac{h_n}{ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1$$
Or (u_n) admet une limite finie, d'où, par opération :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 0$$
Et ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} + 1 = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1$.

PETITE REMARQUE
Sinon, on se place "pour n suffisamment grand", puisqu'il est de toute façon destiné à tendre vers $+\infty$... (mais on veut tout de même voir que $\ln(n) \neq 0$)

3.d. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$.

- Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle converge vers γ, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq \gamma$.
- De même, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge vers ℓ, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \gamma$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$.

3.e. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoyant en sortie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p (cette fonction pourra utiliser la fonction de la question **1.**).
Là encore, deux possibilités.
La première utilise la fonction de la question **1.**, la seconde non.

```
import numpy as np

def gamma(p):
    n=1
    u=1
    v=1-np.log(2)
    while abs(u-v)>p:
        n=n+1
        h=suite_h(n)
        u=h-np.log(n)
        v=h-np.log(n+1)
    return v,u

def gamma_bis(p):
    k=1
    S=1
    u=1
    v=1-np.log(2)
    while abs(u-v)>p:
        k=k+1
        S=S+1/k
        u=S-np.log(k)
        v=S-np.log(k+1)
    return v,u
```

PETITE REMARQUE
L'avantage de la seconde : moins de calculs pour l'ordinateur...
Dans la première, on pourrait aussi avoir `u=suite_h(n)-np.log(n)` et `v=suite_h(n)-np.log(n)`, mais cela ferait calculer deux fois h_n...

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

4.a. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = h_{2n} - h_n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  On a :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Et :

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  D'où :

$$S_1 = h_2 - h_1$$

  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n = h_{2n} - h_n$ et montrons que $S_{n+1} = h_{2n+2} - h_{n+1}$.
  On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= h_{2n} - h_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} && h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1} \\ &= h_{2n} - \left(h_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= h_{2n} - h_{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{2-1}{2n+2} \\ &= h_{2n} - h_{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= h_{2n+2} - h_{n+1} \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = h_{2n} - h_n$.

4.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= h_{2n} - h_n && u_n = h_n - \ln(n) \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2n) - \ln(n) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

4.c. Conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

On a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

Or on sait que (u_n) converge vers γ, c'est donc également le cas de (u_{2n}) (suite extraite). Et ainsi, par opérations sur les limites ($\gamma \neq \infty$, car convergence...) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = 0$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$.

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

> ☞ **Pour info...**
> En fait, c'est également le cas de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ...

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : C'est un exercice très classique, dont le thème est lui aussi très classique (cette fameuse *série harmonique* que nous reverrons bientôt.
Deux questions plus compliquées dans cet exercice :

- la seconde partie de la question 3.a.,
- l'hérédité de la question 4.a., un peu calculatoire.

Le reste est à retravailler autant de fois que nécessaire !

Au passage, il est anormal que la question 2.c. soit si mal traitée : il me semble que le calcul de $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ est un grand classique, qui n'est d'ailleurs qu'une succession de réflexes !

★★★★★★★

Exercice 2

On considère deux urnes :

- une urne rouge, $\mathcal{U}_\mathrm{R}$, composée de deux balles rouges et deux balles bleues
- une urne bleue, $\mathcal{U}_\mathrm{B}$, composée d'une balle rouge et trois balles bleues

Le but de l'exercice est d'étudier deux jeux de tirage dans ces urnes, avec ou sans remise.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'évènement "on tire une balle rouge au n-ième tirage" et B_n l'évènement : "on tire une balle bleue au n-ième tirage". Le premier tirage s'effectue toujours dans l'urne rouge ; puis le tirage numéro n s'effectuera dans l'urne de la couleur de la balle obtenue au tirage numéro $n-1$. On suppose qu'il y a équiprobabilité du choix des différentes balles.

Les parties A et B sont indépendantes entre elles.

Partie A

Dans cette partie, on effectue une **succession de tirages avec remise** selon le protocole décrit au début de l'exercice.
On notera également, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \mathbb{P}(\mathrm{R}_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\mathbb{P}(\mathrm{R}_n) \neq 0$ puis $\mathbb{P}_{\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.

   - Le tirage s'effectuant sans remise, les urnes $\mathcal{U}_\mathrm{R}$ et $\mathcal{U}_\mathrm{B}$ contiendront toujours des balles rouges. Ainsi : $\mathbb{P}(\mathrm{R}_n) \neq 0$.
   - Ensuite, supposons R_n réalisé. Dans ce cas, le tirage $n+1$ s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_\mathrm{R}$, qui est toujours de même composition, les tirages étant effectués avec remise.
     L'évènement R_{n+1} est réalisé si, et seulement si, on pioche une des 2 boules rouges parmi les 4 boules de l'urne $\mathcal{U}_\mathrm{R}$.
     D'où, par équiprobabilité du choix des balles :
     $$\mathbb{P}_{\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

Important ! C'est la première question d'un exercice et le résultat est donné : aller trop vite est la garantie de n'avoir aucun point ! La composition de l'urne (après avoir précisé laquelle) ainsi que l'équiprobabilité des boules doit être mentionnée.

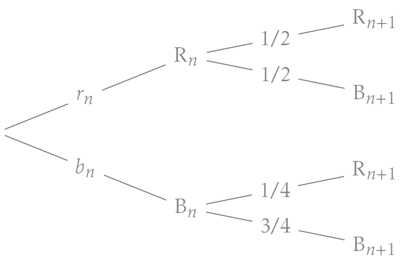
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{R}_n) \neq 0\ ;\ \mathbb{P}_{\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $r_{n+1} = \dfrac{1}{4} r_n + \dfrac{1}{4}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   - Puisque le tirage est avec remise, on peut modéliser la situation des étapes n et $n+1$ par l'arbre suivant :

Petite remarque L'arbre n'est pas demandé, et il faut arriver à s'en détacher... C'est simplement pédagogique ici pour aider à comprendre le principe.



     D'après la formule des probabilités totales avec $(\mathrm{R}_n, \mathrm{B}_n)$ comme système complet d'évènements, on a :
     $$\begin{aligned} r_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{R}_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{R}_n \cap \mathrm{R}_{n+1}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{R}_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{R}_n) \times \mathbb{P}_{\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) \times \mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} r_n + \frac{1}{4} b_n \end{aligned}$$
     $\mathbb{P}(\mathrm{R}_n) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) \neq 0$ (question précédente et analogue)
     question précédente, et analogue pour $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{R}_{n+1})$
   - Or, puisque $(\mathrm{R}_n, \mathrm{B}_n)$ est un système complet d'évènements, on a $r_n + b_n = 1$.
     D'où :
     $$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{1}{2} r_n + \frac{1}{4}(1 - r_n) \\ &= \frac{1}{4} r_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} = \dfrac{1}{4} r_n + \dfrac{1}{4}$.

3. En déduire le terme général de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis celui de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   D'après la question précédente, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique... On applique la méthode habituelle !

✘ Attention ! r_1 est le premier terme de (r_n), donc le premier terme de la suite géométrique que l'on pose est au rang 1...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$ et $b_n = 1 - r_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Partie B

Dans cette partie, on effectue **trois tirages successifs sans remise** selon le protocole décrit précédemment.

1. Justifier que $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{3}$. Déterminer également $\mathbb{P}_{B_1}(R_2)$.

   - Supposons l'évènement R_1 réalisé ; autrement dit, on a obtenu une balle rouge au premier tirage. Dans ce cas, l'évènement R_2 est réalisé si, et seulement si, on tire à nouveau une balle rouge dans l'urne $\mathcal{U}_R$. Mais l'urne $\mathcal{U}_R$ est alors, les tirages étant sans remise, composée d'une seule balle rouge et de deux balles noires. Par conséquent, par équiprobabilité du choix des balles :
   $$\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{3}$$
   - Supposons l'évènement B_1 réalisé ; autrement dit, on a obtenu une balle bleue au premier tirage. Dans ce cas, l'évènement R_2 est réalisé si, et seulement si, on tire une balle rouge dans l'urne $\mathcal{U}_B$. L'urne $\mathcal{U}_B$ n'ayant pas été utilisée, sa composition est inchangée. Par conséquent, par équiprobabilité du choix des balles :
   $$\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{1}{4}$$

2. Calculer $\mathbb{P}(R_2)$.
   D'après la formule des probabilités totales avec (R_1, B_1) comme système complet d'évènements, on a : on a :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) \\ &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(R_2) && \text{$\mathbb{P}(R_1)$ et $\mathbb{P}(B_1)$ sont non nulles} \\ & && \text{question précédente} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{24}\end{aligned}$$

✓ Rigueur !
On précise bien le sce utilisé.

3. Calculer $\mathbb{P}_{R_2}(R_1)$.
   Puisque $\mathbb{P}(R_2) \neq 0$, on a :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}_{R_2}(R_1) &= \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2))}{\mathbb{P}(R_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} && \text{question précédente} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} \\ &= \frac{4}{7}\end{aligned}$$

   Conclusion : $\mathbb{P}_{R_2}(R_1) = \frac{4}{7}$.

4. Que dire de l'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$?

   L'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ est réalisé si, et seulement si, on tire trois balles rouges successives dès le 1er lancer
   si, et seulement si, on tire trois balles rouges successivement et sans remise dans l'urne $\mathcal{U}_R$

   Or, cette urne n'est composée que de 2 balles rouges.

   Conclusion : $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \varnothing$: il est impossible de tirer trois balles rouges en effectuant seulement 3 tirages.

5. On note X la variable aléatoire égale au nombre de balles rouges obtenues durant ces trois tirages.

   5.a. Donner $X(\Omega)$. *Justifier.*

   - Puisque X est le nombre de balles rouges obtenues sur les trois tirages, on a de façon immédiate : $X(\Omega) \subset [\![0;3]\!]$. Mais, $[X = 3] = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \varnothing$.
   Donc :
   $$[X = 3] \subset [\![0;2]\!]$$
   - Réciproquement : (en notant B les balles bleues et R les balles rouges)
     - l'issue (B, B, B) réalise l'évènement $[X = 0]$,
     - l'issue (R, B, B) réalise l'évènement $[X = 1]$,
     - l'issue (R, B, R) réalise l'évènement $[X = 2]$.

   Ainsi : $\forall k \in [\![0;2]\!]$, $[X = k] \neq \varnothing$.
   D'où :
   $$[\![0;2]\!] \subset X(\Omega)$$

   Conclusion : $X(\Omega) = [\![0;2]\!]$.

Vocabulaire
Rappel de vocabulaire :
• une issue réalise un évènement
• un évènement est inclus dans un autre
• ça n'a pas de sens de dire "un évènement réalise un évènement"
• on pourrait aussi écrire $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \varnothing$ et $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \subset [X = 0]$, donc $[X = 0]$ est non vide. Mais il faudrait bien préciser $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \varnothing$. Alors que l'écriture d'une issue sous-entend son existence.

   5.b. Déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$. En déduire $\mathbb{P}([X = 0])$.

   - Supposons que l'évènement $B_1 \cap B_2$ est de probabilité non nulle et qu'il est réalisé.
   Le premier tirage, dans l'urne $\mathcal{U}_R$ a donc donné une balle bleue ; et le second, dans l'urne $\mathcal{U}_B$ a donné également une balle bleue. Par conséquent, le troisième tirage se fera dans l'urne $\mathcal{U}_B$.
   Rappelons que les tirages ont été faits sans remise...
   Dans ce cas l'évènement B_3 est réalisé si, et seulement si, on tire l'une des 2 balles bleues restantes parmi les 3 balles de l'urne.
   Ainsi :
   $$\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{2}{3}$$
   - L'évènement $[X = 0]$ est réalisé si, et seulement si, on ne tire que des balles bleues sur les trois tirages.
   Ainsi :
   $$[X = 0] = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

- On a ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=0]) &= \mathbb{P}(B_1\cap B_2\cap B_3)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\times\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) && \text{formule des probabilités composées, puisque } \mathbb{P}(B_1\cap B_2)\neq 0\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3} && \text{point précédent}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0])=\dfrac{1}{4}$.

5.c. Calculer également $\mathbb{P}([X=1])$.

- L'évènement $[X=1]$ est réalisé si, et seulement si, on tire une balle blanche et deux noires sur les trois tirages.
  Ainsi :

$$[X=1]=(R_1\cap B_2\cap B_3)\cup(B_1\cap R_2\cap B_3)\cup(B_1\cap B_2\cap R_3)$$

- Or, les évènements $R_1\cap B_2\cap B_3$, $B_1\cap R_2\cap B_3$ et $B_1\cap B_2\cap R_3$ sont deux à deux incompatibles (les intersections deux à deux sont vides, puisqu'elles exigeraient d'obtenir deux balles différentes sur un même tirage), d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1]) &= \mathbb{P}(R_1\cap B_2\cap B_3)+\mathbb{P}(B_1\cap R_2\cap B_3)+\mathbb{P}(B_1\cap B_2\cap R_3)\\ &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2)\mathbb{P}_{R_1\cap B_2}(B_3)+\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(R_2)\mathbb{P}_{B_1\cap R_2}(B_3)+\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(R_3) && \text{formule des probabilités composées, lic}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{3} && \text{analogue à ce qui été fait en } \mathbf{5.b.}\\ &= \frac{6+1+3}{24}\\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=1])=\dfrac{5}{12}$.

5.d. Vérifier que $\mathbb{P}([X=2])=\dfrac{1}{3}$.

Puisque $X(\Omega)=\{0;1;2\}$, la famille $\big([X=0],[X=1],[X=2]\big)$ est un système complet d'évènements. Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X=0])+\mathbb{P}([X=1])+\mathbb{P}([X=2])=1$$

Puis, avec les résultats des deux questions précédentes...

Conclusion : $\mathbb{P}([X=2])=\dfrac{1}{3}$.

5.e. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

- Puisque $X(\Omega)=[\![0;2]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0\times\mathbb{P}([X=0])+1\times\mathbb{P}([X=1])+2\times\mathbb{P}([X=2])\\ &= \frac{5}{12}+2\frac{1}{3}\\ &= \frac{13}{12}\end{aligned}$$

- Puisque $X(\Omega)=[\![0;2]\!]$, on a, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 0^2\times\mathbb{P}([X=0])+1^2\times\mathbb{P}([X=1])+2^2\times\mathbb{P}([X=2])\\ &= \frac{5}{12}+4\frac{1}{3}\\ &= \frac{21}{12}\\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2\\ &= \frac{21}{12}-\frac{169}{144}\\ &= \frac{252-169}{144}\\ &= \frac{83}{144}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X)=\dfrac{13}{12}$ et $\mathbb{V}(X)=\dfrac{83}{144}$.

6. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de balles bleues obtenues durant ces trois tirages.

6.a. Exprimer Y en fonction de X.

Puisque X est le nombre de balles rouges et Y le nombre de balles bleues et que l'on tire trois balles, on a $X+Y=3$.

Conclusion : $Y=3-X$.

6.b. En déduire $\mathbb{P}([Y=1])$ ainsi que $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Puisque $Y=3-X$, on en déduit :

-

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([3-X=1])\\ &= \mathbb{P}([X=2])\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Important ! Si l'énoncé dit d'exprimer Y en fonction de X, alors il sous-entend très fortement que les calculs de cette question devront utiliser les résultats sur X et le lien entre Y et X ! Ensuite, c'est du cours...

- $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(3-X) && \text{par linéarité de l'espérance}\\ &= 3-\mathbb{E}(X)\\ &= 3-\frac{13}{12}\\ &= \frac{23}{12}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(3-X) && \text{propriété de la variance}\\ &= \mathbb{V}(X)\\ &= \frac{83}{144}\end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir des copies : C'est très aléatoire dans les copies sur cet exercice. Il n'en demeure pas moins que c'est un exercice qui permet de retravailler les raisonnements et les méthodes essentiels du chapitre.
Avant de s'aventurer dans d'autres exercices, il faut s'assurer que celui-ci est bien compris et bien rédigé.
Quelques remarques en détails :

- Partie A - question 1. : ma nièce de 7 ans a réussi à m'expliquer pourquoi $\mathbb{P}(R_n) \neq 0$ en une phrase. Pourquoi plus d'un tiers de la classe a du mal ?!
- Partie B - question 1. : même remarque, on explique bien. D'autant plus que si c'était si trivial, tout le monde aurait eu la bonne valeur de $\mathbb{P}_{B_1}(R_2)$...
- Question 5.b. : comment peut-on sortir de plus de semaines de cours et écrire "$\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) = \mathbb{P}(B_1\cap B_2\cap B_3)$". Réfléchissez au sens de ce que vous écrivez (et apprenez votre cours accessoirement).
- Question 5.c. : si vous n'entendez pas ma voix dire "on raisonne sur les évènements et après on calcule les probabilités", alors vous n'écoutez pas suffisamment en cours.
  On rappelle que de façon générale : $\mathbb{P}(A)\cup B) \neq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$. Ce n'est, après tout, que la définition de probabilité, ça ne doit pas être si important c'est ça... ?
- Trop peu sont ceux qui mentionnent la "formule des probabilités composées", même si vous indiquez bien son hypothèse en principe.

★★★★★★★

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une balle noire non numérotée et $n-1$ balles blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces balles au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la balle noire.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une balle blanche", on pose $N_i = \overline{B_i}$ et on note X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X_n.

$X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
Justifions ce résultat (même si ce n'était ici pas demandé). Il s'agit d'établir l'égalité de deux ensembles, raisonnons pas double inclusion.

$\subset$ Puisque X_n est le rang d'apparition de la balle noire, on a déjà $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Mais, puisque les tirages sont effectués sans remise et qu'il y a n balles dans l'urne, on a en fait :

$$X_n(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$$

$\supset$ Soit $k \in [\![1; n]\!]$.

- ◇ L'évènement $[X_n = 1]$ est réalisé en tirant la balle noire dès le premier tirage.
- ◇ L'évènement $[X_n = k]$ est par exemple réalisé par l'issue (le k-uplet) $(B, \dots, B, N)$, contenant $k-1$ balles blanches puis la noire.

Ainsi, $[X_n = k] \neq \varnothing$.
D'où :

$$[\![1; n]\!] \subset X_n(\Omega)$$

Conclusion : $X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

♡ Astuce du chef! ♡
Même si l'énoncé ne demande pas de justifier, on explique rapidement le résultat.
En revanche, si l'énoncé demande une justification, on fournit une démonstration plus élaborée.

2. 2.a. Pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i)$.

Soit $i \in [\![2; n-1]\!]$.
Supposons l'évènement $B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}$ réalisé. Les $i-1$ premier tirages ont ainsi tous donné une balle blanche. Par conséquent, les tirages étant effectués sans remise : pour le i-ème tirage, l'urne est composée de $n-(i-1)$ balles, dont toujours la noire.
Mais :

l'évènement B_i est réalisé si, et seulement si, au i-ème tirage, on pioche une balle blanche
si, et seulement si, au i-ème tirage, on pioche une des $n-i$ balles blanches restantes parmi les $n-i+1$ balles restan

Ainsi, par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne, on a :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

Conclusion : pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Petite remarque
L'énoncé sous-entend ici que $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}) \neq 0$.

2.b. Établir alors :

$$\forall k \in X_n(\Omega),\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{n}$$

Soit $k \in [\![1; n]\!]$.

- **Si $k = 1$:**
L'évènement $[X_n = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on pioche directement la balle noire.
Ainsi :

$$[X_n = 1] = N_1$$

Et alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = 1]) &= \mathbb{P}(N_1) \quad \text{équiprobabilité du choix des balles} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

- **Si $k \in [\![2; n]\!]$:**
L'évènement $[X_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, les $k-1$ premiers tirages ont donné des balles blanches et la balle noire a été tirée au k-ième.

$$[X_n = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \right) \cap N_k = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

Ainsi, d'après la formule des probabilités composées (puisque $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \end{aligned}$$

Or :

- ◇ $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{n-1}{n}$
- ◇ et, par un raisonnement analogue à ce qui a été fait en question précédente : $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$.

D'où, d'après la question précédente (licite, car $k \leq n$, donc $k-1 \in [\![2; n-1]\!]$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \quad \text{télescopage} \\ &= \frac{1}{n} \times 1 \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Petite remarque
En prêtant un peu attention à l'énoncé, on remarque que l'évènement N_n n'est pas défini. Simple oubli semble-t-il, utilisons-le quand-même, sa définition est implicite.

> ☞ POUR INFO...
> X_n suit la loi uniforme suer $[\![1;n]\!]$. Nous reverrons cela plus tard.

Conclusion : $\forall k \in X_n(\Omega),\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{1}{n}$.

2.c. Calculer l'espérance et la variance de X_n, notées respectivement $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

- Puisque $X_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X_n = k]) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} && \text{linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

- Puisque $X_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$, on a, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}([X_n = k]) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} && \text{linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1(2n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} \\
&= \frac{(n+1)\big(2(2n+1) - 3(n+1)\big)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{12}
\end{aligned}$$

> PETITE REMARQUE
> Puisque la loi de X_n est connue (uniforme sur $[\![1;n]\!]$), l'énoncé initiale ne demandait pas de calculer son espérance et sa variance : il demandait simplement de les *donner*. Ces résultats seront à connaître quand nous les aurons revus.

Conclusion : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la balle numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

3.a. Pour tout $k \in X_n(\Omega)$, montrer que :

$$\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Soit $k \in [\![1;n]\!]$.

L'évènement $[X_n = k] \cap [Y = 0]$ est réalisé si, et seulement si, la balle noire est tirée au k-ième tirage et la balle numéro 1 n'a pas été tirée
si, et seulement si, les tirages 1 à $k-1$ ont donné une balle blanche numérotée 0 et le k-ième tirage l

En notant, pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$, $B_{i,0}$: "le i-ème tirage donne une balle blanche numérotée 0", on a ainsi :

$$[X_n = k] \cap [Y = 0] = B_{1,0} \cap B_{2,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0} \cap N_k$$

D'où, d'après la formule des probabilités composées (puisque $\mathbb{P}(B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0}) \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) &= \mathbb{P}(B_{1,0} \cap B_{2,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0} \cap N_k) \\
&= \mathbb{P}(B_{1,0}) \times \mathbb{P}_{B_{1,0}}(B_{2,0}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{k-2,0}}(B_{k-1,0}) \times \mathbb{P}_{B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{k-1,0}}(N_k)
\end{aligned}$$

Or :

- par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne : $\mathbb{P}(B_{1,0}) = \dfrac{n-2}{n}$
- $\mathbb{P}_{B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{k-1,0}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$: en effet, si $B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0}$ est réalisé, alors, au tirage k, l'urne est composée de $n-(k-1)$ balles, dont une seule noire... Dans ce cas, par équiprobabilité du choix des balles, la probabilité de tirer la noire au k-ième tirage est $\dfrac{1}{n-k+1}$.
- pour tout $i \in [\![2;n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{i-1,0}}(B_{i,0}) = \dfrac{n-i-1}{n-i+1}$: en effet, si $B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{i-1,0}$ est réalisé, alors, au tirage i, l'urne est composée de $n-(i-1)$ balles, dont la noire, la blanche numérotée 1, et le reste étant des blanches numérotées 0 (il y en a donc $n-(i-1)-2 = n-i-1$). Dans ce cas, par équiprobabilité du choix des balles, la probabilité de tirer une blanche au i-ième tirage est $\dfrac{n-i-1}{n-i+1}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y=0]\Big) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+3} \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} && \text{télescopage avec décalage de 2} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} \times (n-k) \times 1 \\
&= \frac{n-k}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y=0]\Big) = \dfrac{n-k}{n(n-1)}$.

3.b. En déduire, grâce à la formule des probabilités totales, la valeur de $\mathbb{P}([Y=0])$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\Big([X_n = k]\Big)_{k \in [\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=0]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y=0]\Big) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} && \text{linéarité de la somme, changement d'indice } i = n-k \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y=0]) = \dfrac{1}{2}$.

Réflexe !
Grâce à la question précédente, on connaît tous les $\mathbb{P}(A_i \cap B)$, et on veut $\mathbb{P}(B)$: FPT !! Est-ce que $(A_i)_i$ est bien un sce ?

Petite remarque
Le changement d'indice n'était pas nécessaire. Il est aussi possible de faire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k) = \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k = \dots$
Mais c'est plus calculatoire...

3.c. Déduire alors la loi de Y.

Puisque $Y(\Omega) = \{0;1\}$, on a :

$$\mathbb{P}([Y=0]) + \mathbb{P}([Y=1]) = 1$$

D'où $\mathbb{P}([Y=1])$ d'après la question précédente...

Conclusion : $Y(\Omega) = \{0;1\}$
$\mathbb{P}([Y=0]) = \mathbb{P}([Y=1]) = \dfrac{1}{2}$.

Pour info...
Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Nous reverrons cela plus tard.

4. 4.a. Recopier et compléter le script Python suivant de sorte que l'exécution de `simul_X(n)` simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie la valeur de X_n associée. *On admettra que la balle noire est codée tout au long de ce script par le nombre* `N`.

```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_X(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    while u!=N:
        N=...
        u=...
        X=...
    return X
```

```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_X(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    while u!=N:
        N=N-1
        u=rd.randint(1,N+1)
        X=X+1
    return X
```

4.b. En utilisant la fonction créée à la question précédente, écrire une fonction Python telle que l'exécution de `esp_var_X(n)` renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_n)$ et une de $\mathbb{V}(X_n)$.

```python
def simul_esp_var(n):
    L=[simul_X(n) for k in range(10000)]
    L2=[x**2 for x in L]          #liste pour th de transfert
```

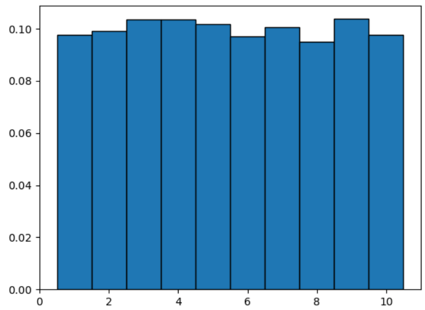
```python
    E=sum(L)/len(L)
    V=sum(L2)/len(L2)-E**2          #KH
    return E,V
```

4.c. Recopier et compléter le programme suivant afin que son exécution affiche l'histogramme obtenu à partir de 10000 réalisations de la variable aléatoire X_n, où n est saisi par l'utilisateur.

```python
n=int(input("n=?"))
Labs=
LX=
plt.hist(LX,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

```python
n=int(input("n=?"))
Labs=[-0.5+k for k in range(1,n+2)]
LX=[simul_X(10) for k in range(10000)]
plt.hist(LX,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

4.d. On a exécuté le programme de la question précédente en saisissant $n = 10$ et on a obtenu le graphique qui suit. Expliquer en quoi le graphique est cohérent avec la loi de X_n obtenue en question 2.b.



✘ Attention !
C'est un histogramme de **fréquences**, et non de probabilités !!

Puisque cet histogramme de fréquences est obtenu sur un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire X_{10}, on peut légitimement penser qu'il se rapproche de la distribution de probabilité de la variable aléatoire X_{10}.

Pourquoi ?
C'est la **loi faible des grands nombres** qui justifie cela.

Or, on avait trouvé : $X_{10}(\Omega) = [\![1;10]\!]$ et $\forall k \in [\![1;10]\!]$, $\mathbb{P}([X_{10} = k]) = \dfrac{1}{10}$. Ceci est bien cohérent avec l'histogramme des fréquences obtenu.

4.e. Écrire une fonction de sorte que l'exécution de `simul_XY(n)` simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie les valeurs de X_n et Y associées.

```python
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    Y=0
    while u!=N:
        if u==1:
            Y=1
        N=N-1
        u=rd.randint(1,N+1)
        X=X+1
    return X,Y
```

Petite remarque
Le numéro N correspond toujours à la balle noire ; et le numéro 1 à la balle blanche numérotée 1.

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice trop maltraité...

- Question 2.a. : à revoir ! Il suffit de mettre en place la rédaction habituelle et de déterminer la composition de l'urne ! C'est le même principe que ce qui est fait en début des parties A et B de l'exercice 2. Il faut savoir faire... D'autant plus que la question suivante dépendait de ce résultat.
- La question 2.c. était fortement rémunérée et pouvait être traitée à partir du résultat donné à la question précédente. Aucune difficulté calculatoire : c'est LA question à faire !
- Peu de choses ensuite... Les premiers programmes Python sont corrects, le dernier n'a été traité par quasiment personne...

★★★★★★★

Exercice 4

Dans toute la suite de l'exercice, on note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \ ; \ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Partie A. Étude de la suite de Fibonacci.

1. Établir : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 < F_n < F_{n+1}$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 2$:
     On a : $F_2 = F_0 + F_1 = 1$ et $F_3 = F_2 + F_1 = 2$.
     On a ainsi :
     $$0 < F_2 < F_3$$
     L'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Supposons "$0 < F_n < F_{n+1}$" et montrons "$0 < F_{n+2} < F_{n+3}$".
     - Par hypothèse de récurrence, on a :
       $$0 < F_n$$
       D'où :
       $$F_{n+1} < F_n + F_{n+1}$$
       Autrement dit :
       $$F_{n+1} < F_{n+2}$$
     - Mais, on a également par hypothèse de récurrence :
       $$0 < F_n < F_{n+1}$$
       En particulier :
       $$F_{n+1} > 0$$

     Par conséquent :
     $$0 < F_{n+1} < F_{n+2}$$
     L'hérédité est établie.

   Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 < F_n < F_{n+1}$.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de F_n en fonction de n.
   (F_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont les solutions sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (notée φ) et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (notée φ').
   Par conséquent :
   $$\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \lambda\varphi^n + \mu\varphi'^n$$
   Or non sait que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. De plus :
   $$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \varphi\lambda + \varphi'\mu = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \varphi L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (\varphi' - \varphi)\mu = 1 \end{cases} \quad \varphi' - \varphi = \sqrt{5}$$
   $$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \varphi'^n\right)$.

3. Montrer alors que la suite (F_n) diverge vers $+\infty$.
   On sait que $4 < 5 < 9$, d'où, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$:
   $$2 < \sqrt{5} < 3$$
   - Ainsi :
     $$\varphi > 1$$
     D'où :
     $$\lim_{n\to+\infty} \varphi^n = +\infty$$
   - Également :
     $$-1 > 1 - \sqrt{5} > -2$$
     Et ainsi :
     $$\frac{-1}{2} > \varphi' > -1$$
     D'où :
     $$\lim_{n\to+\infty} \varphi'^n = 0$$

   Par opérations, on obtient :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \varphi'^n\right) = +\infty$$

   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.
   Autrement dit, (F_n) diverge vers $+\infty$.

Partie B. Deux programmes Python.

4. Écrire une fonction Python telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `fibo(n)` renvoie la valeur de F_n.
Cette fonction ne doit pas être récursive.
Si on exécute le script Python suivant

```python
L=[fibo(k) for k in range(20)]
print (L)
```

on doit obtenir :

```
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181]
```

```python
def fibo(n):
    u,v=0,1
    if n==0:
        return u
    elif n==1:
        return v
    else:
        for k in range(2,n+1):
            u,v=v,u+v
        return v
```

Le programme suivant convient également :

```python
def fibo(n):
    u,v=0,1
    for k in range(1,n+1):
        u,v=v,u+v
    return u
```

✘ Attention ! Ici, la boucle for tourne une fois de plus (quand $k = 1$). Il faut donc renvoyer **u** et non v... Il est plus court, mais moins évident à comprendre peut-être.

5. Écrire une fonction Python nommée `recherche` prenant en arguments d'entrée :
   - un réel x,
   - une liste L de réel triés dans l'ordre croissant, dont le premier élément est inférieur ou égal à x et le dernier strictement supérieur à x,

   et renvoyant en sortie le plus grand élément de L qui soit inférieur ou égal à x.
Avec une boucle `while` :

```python
def recherche(x,L):
    i=0
    while L[i]<=x:
        i=i+1
    return L[i-1]
```

Avec une boucle `for` :

```python
def recherche(x,L):
    for i in range(0,len(L)-1):
        if L[i+1]>x:
            return L[i]
```

Important ! Dans les deux cas, le programme fonctionne uniquement parce-que la liste est triée dans l'ordre croissant et que le premier élément est inférieur ou égal à x et le dernier strictement supérieur.

Partie C. Le théorème de Zeckendorf.

Dans cette partie, on s'intéresse au théorème suivant appelé **théorème de Zeckendorf** :

> Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique entier non nul k et un unique k-uplet d'entiers $(c_1;...;c_k)$ tels que :
> - $c_1 \geq 2$ et $\forall i \in [\![1;k-1]\!]$, $c_i + 1 < c_{i+1}$
> - $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} F_{c_i}$, où (F_n) est la suite de Fibonacci précédemment introduite.

Important ! L'énoncé fournit un résultat que nous ne connaissons pas. Il faut prendre le temps nécessaire pour en comprendre la signification.
Ce théorème affirme en fait que tout entier naturel non nul peut s'écrire comme une somme de termes non consécutifs (du fait de $c_1 + 1 < c_2 + 1 < ... < c_k$) de la suite de Fibonacci.

Une telle décomposition d'un entier naturel non nul n s'appelle **décomposition de Zeckendorf de n**.
Exemples :

- Pour $n = 4$: on remarque que $4 = 1 + 3 = F_2 + F_4$. Donc $k = 2$ et $(c_1;c_2) = (2;4)$.
- Pour $n = 17$: on remarque que $17 = 1 + 3 + 13 = F_2 + F_4 + F_7$. Donc $k = 3$ et $(c_1;c_2;c_3) = (2;4;7)$.

6. *On rappelle que la liste des premiers termes de la suite de Fibonacci a été donnée en question 4.*

6.a. En remarquant que $6 = 1+2+3 = F_2+F_3+F_4$ et que $6 = 1+5 = F_2+F_5$, donner la décomposition de Zeckendorf de 6. Justifier.

D'après l'énoncé du théorème de Zeckendorf, les termes de la suite de Fibonacci dans la décomposition d'un entier naturel non nul ne doivent pas être consécutifs.

Par conséquent : $6 = F_2+F_3+F_4$ n'est pas une décomposition de Zeckendorf.

La décomposition $6 = F_2+F_5$ est une somme de termes non consécutifs de la suite de Fibonacci.

Conclusion : $6 = F_2+F_5$ est la décomposition de Zeckendorf de 6.

6.b. Donner, sans justifier, les décompositions de Zeckendorf de 88 et 233.

- $88 = 55+21+8+3+1 = F_2+F_4+F_6+F_8+F_{10}$
- $233 = F_{13}$

PETITE REMARQUE
On s'y prend en partant du plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à 88...

7. *Dans cette question, nous allons démontrer l'existence d'une telle décomposition.* Procédons par récurrence forte. Le résultat est bien évidemment valable pour 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que "tout entier $m \in [\![1;n]\!]$ admet une décomposition de Zeckendorf" et montrons que "$n+1$ admet une décomposition de Zeckendorf".

7.a. Justifier l'existence d'un entier J supérieur ou égal à 4 tel que : $\forall i \geq J,\ F_i \geq n+2$.

Puisque la suite (F_i) diverge vers $+\infty$, par définition :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists J \in \mathbb{N} \ /\ \forall i \in [\![J;+\infty[\![,\ F_i \geq M$$

En particulier, pour $M = n+2$: il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in [\![J;+\infty[\![$, $F_i \geq n+2$.

Or, $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n+2 \geq 3$. Et comme $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, on a nécessairement $J \geq 4$.

Conclusion : il existe un entier J supérieur ou égal à 4 tel que : $\forall i \geq J,\ F_i \geq n+1$.

7.b. Notons $E_n = \{i \in \mathbb{N}^* \ /\ F_i \leq n+1\}$. Montrer que $3 \in E_n$ et que E_n contient au plus $J-1$ éléments. *On note alors j le plus grand élément de E_n.*

- Puisque $F_3 = 2$ et que $n \in \mathbb{N}^*$, on a $F_2 \leq n+1$. Ainsi : $3 \in E_n$.
- D'après la question précédente, pour tout $i \geq J$, on a $F_i \geq n+2 > n+1$. Par conséquent, seuls les termes $F_1, F_2, \ldots, F_{J-1}$ peuvent être dans E_n.
  Autrement dit : $E_n \subset [\![1;J-1]\!]$: l'ensemble E_n contient au plus $J-1$ éléments.

Conclusion : E_n contient 3 et le plus grand élément de E_n est noté j.

☞ POUR INFO...
C'est parce-que l'ensemble E_n est fini que l'on peut, sans problème, justifier l'existence d'un élément maximal, et donc l'existence de j.

7.c. Justifier que $j \geq 3$ et que $F_j \leq n+1 < F_{j+1}$.

- Par définition, j est l'élément maximal de E_n. Mais on sait que $3 \in E_n$. D'où : $j \geq 3$.
- Par définition, $j \in E_n$; donc $F_j \leq n+1$. Mais, puisque j est l'élément maximal de E_n, $j+1 \notin E_n$. D'où : $F_{j+1} > n+1$.
  Ainsi :
  $$F_j \leq n+1 < F_{j+1}$$

Conclusion : $j \geq 3$ et $F_j \leq n+1 < F_{j+1}$.

7.d. Posons $m = n+1-F_j$. Montrer que $m < F_{j-1}$ puis conclure sur la décomposition de Zeckendorf de $n+1$.

★SUBTILE...★
C'est ici que l'hérédité s'achèvera. Nous allons donc utiliser l'hypothèse de récurrence... sur m !

- Transformons le résultat par équivalences. On a :
  $$\begin{aligned} m < F_{j-1} &\iff n+1-F_j < F_{j-1} \\ &\iff n+1 < F_j + F_{j-1} \\ &\iff n+1 < F_{j+1} \end{aligned}$$
  D'après la question précédente, la dernière inégalité est vraie. Par équivalences, la première l'est également.
  $$\boxed{m < F_{j-1}}$$
- Montrons maintenant que $n+1$ admet une décomposition de Zeckendorf.
  - Si $n+1 = F_j$: alors ceci fournit une décomposition de Zeckendorf de $n+1$.
  - Sinon : puisque $F_j \leq n+1$, on a alors $F_j \leq n$, et donc $m \geq 1$.
    Mais, on sait que $j \geq 3$, donc $F_j \geq 1$, et donc $m \leq n$.
    Par conséquent :
    $$m \in [\![1;n]\!]$$
    Par hypothèse de récurrence, il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tels que :
    ⇝ $c_1 \geq 2$ et $\forall i \in [\![1;k-1]\!]$, $c_i + 1 < c_{i+1}$
    ⇝ $m = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} F_{c_i}$
    Par conséquent :
    $$\begin{aligned} n+1 &= m + F_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} F_{c_i} + F_j \end{aligned}$$
    Posons alors :
    ⇝ $k' = k+1$
    ⇝ $\forall i \in [\![1;k]\!]$, $c'_i = c_i$ et $c_{k'} = j$
    de sorte que :
    $$n+1 = \sum_{i=1}^{k'} F_{c'_i}$$

Or :

- $c'_1 = c_1 \geq 2$
- pour tout $i \in [\![1;k'-2]\!]$ (autrement dit dans $[\![1;k-1]\!]$), $c'_i + 1 = c_i + 1 < c_{i+1} = c'_{i+1}$

Ne reste donc qu'à démontrer que $c'_{k'-1} + 1 < c'_{k'}$, autrement dit, ne reste qu'à montrer que : $c_k + 1 < j$.

On sait que $m < F_{j-1}$ donc $\sum_{i=1}^{k} F_{c_i} < F_{j-1}$. Mais comme chaque terme de $\sum_{i=1}^{k} F_{c_i}$ est positif, on a :

$$F_{c_k} < F_{j-1}$$

La suite de Fibonacci étant strictement croissante, on a ainsi :

$$c_k < j-1$$

D'où :

$$c_k + 1 < j$$

Conclusion : l'entier naturel non nul k' et le k'-uplet $(c'_1;c'_2;\dots;c'_{k'})$ fournit un décomposition de Zeckendorf de $n+1$.

Dans les deux cas, $n+1$ possède une décomposition de Zeckendorf.

PETITE REMARQUE

Par récurrence, on a ainsi démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n admet une décomposition de Zeckendorf.
Il serait également possible de démontrer l'unicité d'une telle décomposition...

8. 8.a. Expliquer ce que renvoie l'exécution de la fonction `Python` suivante.

```
def liste_fibo(n):
    L=[0,1]
    while L[-1]<=n:
        L.append(L[-2]+L[-1])
    return L
```

Pourquoi préférer le programme précédent au programme suivant (où `fibo` est la fonction créée à la question 4.)?

```
def liste_fibo_bis(n):
    i=0
    L=[fibo(i)]
    while L[-1]<=n:
        i=i+1
        L.append(fibo(i))
    return L
```

- Ces deux programmes renvoient la même chose : la liste composée des termes de la suite de Fibonacci inférieurs ou égaux à n ainsi que le premier terme suivant.
- Expliquons rapidement le premier programme...
  - On commence par initialiser une liste avec les deux premiers termes de la suite de Fibonacci.
  - Ensuite : tant que le dernier terme de cette liste est inférieur ou égal à n, on ajoute à cette liste la somme des deux derniers termes de la liste. Autrement dit, on ajoute à la liste le terme suivant dans la suite de Fibonacci.
    On s'arrête dès que le dernier terme de cette liste est strictement supérieur à n. Tous les précédents seront donc bien inférieurs ou égaux à n.
- Dans le second programme, on ajoute à chaque fois le terme de la suite de Fibonacci en utilisant `fibo(i)`. Sauf que, à chaque exécution de `fibo(i)`, ce sont tous les termes jusqu'à F_i qui sont recalculés. Ce programme nécessite donc davantage d'opérations que le précédent.

8.b. En utilisant les fonctions `recherche` et `liste_fibo` des questions précédentes, écrire un algorithme glouton de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de la commande `Zeckendorf(n)` renvoie la décomposition de Zeckendorf de n.

D'après la question **7.d.**, on voit comment déterminer la (unicité admise) décomposition de Zeckendorf d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$:

- si n est un nombre de Fibonacci, c'est terminé ;
- sinon, on détermine le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à n (pour cela, on utilisera la fonction `recherche` dans la liste `liste_fibo(n)`), noté F_j ; puis on réitère sur $n - F_j$...

```
def Zeckendorf(n):
    L=liste_fibo(n)
    m=n
    decompo=[]
    while m>0:
        f=recherche(m,L)
        decompo.append(f)
        m=m-f
    return decompo
```

CE QU'IL FAUT RETENIR DES COPIES : Exercice trop peu traité, c'est bien dommage... Il n'est pas normal que la partie A pose souci, d'autant plus que la question 2. est une application du cours !