12

Probabilités

Généralités & variable aléatoire en univers fini

Introduction...

C'est au XVI$^{\text{ème}}$ siècle que les mathématiciens commencent à s'intéresser aux jeux de hasard et à leurs gains. De la correspondance entre Fermat et Pascal naîtra le début des probabilités. En 1657, Christian Huygens (1629-1695, néerlandais) introduit l'espérance mathématique. Viennent ensuite Jacques Bernoulli et Abraham De Moivre (1667-1754, français) dont l'apport sur le sujet est considérable ; et c'est d'ailleurs ce dernier qui utilise le premier le terme *probabilités*.
En revanche, à cette époque, les probabilités ne sont pas enseignées et souvent mal traitées par des mathématiciens, jugées trop peu rigoureuses. Le XIX$^{\text{ème}}$ siècle est ainsi l'occasion d'approfondir les notions, mais également de clarifier les fondements... L'objectif est simple : faire des probabilités une branche des mathématiques à part entière.

Suite de l'histoire au chapitre 16...

Pour bien démarrer...

1 # Quel est le contraire de "il y a plus de 10€ dans mon portefeuille" ?

2 # Quel est le contraire de "il y a au moins une fille dans la salle" ?

3 # En lançant deux dés équilibrés et en notant la somme des deux résultats, quelle est la probabilité d'obtenir 7 ?

4 # Quelle est la probabilité d'obtenir deux PILE consécutifs avec une pièce équilibrée ? Trois PILE consécutifs ?

5 # Dans un groupe d'individus : 20% ont 10€ dans leur poche, 50% ont 20€ et les autres n'ont pas d'argent. Quel est le montant moyen détenu par chaque individu du groupe ?

I Expérience aléatoire & évènements

I.1 Premières définitions

Définitions 1 - Vocabulaire probabiliste

D1# Une **expérience aléatoire** est une expérience comportant plusieurs **issues** envisageables, et dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

D2# L'**univers** de cette expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles.

D3# Un **évènement** est *un ensemble* d'issues.

D4# On dit qu'un évènement est **réalisé** lorsque le résultat de l'expérience appartient à cet évènement.

D5# Les **évènements élémentaires** sont les évènements qui ne contiennent qu'une seule issue.

D6# L'univers, souvent noté Ω, est l'**évènement certain** (il est toujours réalisé).

D7# L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est l'**évènement impossible** (il n'est jamais réalisé).

✎ **Notation**

On note souvent Ω l'univers, $\omega_1, \omega_2, \ldots$ les issues et $A, B, C, \ldots$ des évènements.
Puisque $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, il désigne ici l'ensemble constitué de tous les évènements possibles.

Exemples 1

E1 On lance deux dés cubiques numérotés de 1 à 6 et on observe la somme des deux nombres obtenus.

- Les issues sont : 2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9 ;10 ;11 ;12 et donc $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} = [\![2; 12]\!]$.
- L'évènement $\{7\}$, que l'on peut écrire en français "obtenir 7", est un évènement élémentaire ; il y en a 11.
- Sont des évènements : $\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ ("obtenir un nombre pair"), $\{6; 7\}$ ("obtenir 6 ou 7")...
- Puisque $\text{Card}(\Omega) = 11$, alors $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{11} = 2048$: il y a 2048 évènements possibles !

☞ **Rappel...**

On a déjà démontré que si $\text{Card}(\Omega) = n$, alors $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$.

E2 On lance deux fois de suite la même pièce et on observe le couple de résultats obtenus :

- $\Omega =$
- $\mathcal{P}(\Omega) =$

E3 On observe les résultats d'une succession de lancers d'une pièce jusqu'à l'obtention du premier PILE.
$\Omega =$

E4 Un étudiant arrive au hasard à un arrêt de bus dont le passage s'effectue tous les quarts d'heure. On observe le temps d'attente, en minute, de l'étudiant.
Dans ce cas, $\Omega =$

Dans toute la suite de ce chapitre, nous n'étudierons que des expériences dont l'univers sera fini.

I.2 Opérations sur les évènements

Puisqu'un évènement est un ensemble, les notions abordées dans le chapitre 7, et en particulier les opérations sur les ensembles, sont encore valables sur les évènements. Rappelons-en quelques-unes :

Définitions 2 - Opérations sur les évènements

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et A, B deux évènements.

D1# L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est l'évènement constitué des issues qui sont dans A ET dans B :

$$A \cap B = \left\{\omega \in \Omega \;/\; (\omega \in A \text{ ET } \omega \in B)\right\}$$

D2# L'**union** de A et B, notée $A \cup B$, est l'évènement constitué des issues qui sont dans A **ou** dans B (ou dans les deux) :

$$A \cup B = \left\{\omega \in \Omega \;/\; (\omega \in A \text{ OU } \omega \in B)\right\}$$

D3# L'**évènement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'évènement composé de toutes les issues qui n'appartiennent pas à A :

$$\overline{A} = \left\{\omega \in \Omega \;/\; \omega \notin A\right\}$$

Vocabulaire

Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$: ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

Petite remarque

On définit également les **unions et intersections de n évènements**, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{\omega \in \Omega \;/\; \forall i \in [\![1; n]\!],\ \omega \in A_i\right\}$, réalisée lorsque tous les A_i sont réalisés ;
$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{\omega \in \Omega \;/\; \exists i \in [\![1; n]\!] \;/\; \omega \in A_i\right\}$, réalisée lorsqu'au moins un des A_i est réalisé.

Correspondance de vocabulaire :

Symbole	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
Ω	Ensemble (plein)	Évènement certain
$\varnothing$	Ensemble vide	Évènement impossible
$A \subset \Omega$	Sous-ensemble de Ω	Évènement
$\overline{A}$	Complémentaire de A	Évènement contraire de A
$\omega \in A$	Élément dans A	Issue qui réalise A
$\{\omega\}$	Singleton	Évènement élémentaire
$A \cap B = \varnothing$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Exemples 2

E1 On tire successivement et sans remise deux jetons dans une urne contenant 4 jetons numérotés de 1 à 4 et on note les deux nombres obtenus. On considère les évènements :

- A : "les nombres obtenus sont pairs"
- B : "la somme des deux nombres obtenus est paire"

Ainsi, Card(Ω) =

Et :

Ω =

A =

$A \cup B$ =

$\overline{A} \cap B$ =

$\overline{A} \cap \overline{B}$ =

$\overline{A \cup B}$ =

E2 On effectue n lancers de pièce et on note, pour $k \in [\![1;n]\!]$, P_k l'évènement : "obtenir PILE au lancer k". Ainsi :

"n'obtenir que des PILE" =

"n'obtenir aucun PILE" =

"obtenir au moins un PILE"=

> ☞ **Rappel...**
> Le contraire de "au moins un PILE" est

On retrouve les propriétés vues sur les ensembles, dont on rappelle les principales :

Propriétés 1

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et A, B, C trois évènements.

P1# $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*

P2# $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité)*

P3# $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$

P4# $\overline{\overline{A}} = A$

P5# $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(lois de Morgan)*

P6# $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivité de $\cap$ sur $\cup$)*

P7# $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité de $\cup$ sur $\cap$)*

> **Petite remarque**
> Commutativité, associativité, distributivité ainsi que les lois de Morgan se généralisent aux unions et intersections de n évènements.

Une définition importante pour ce qui suivra :

Définition 3 - Système complet d'évènements

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille d'évènements.
On dit que la famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un **système complet d'évènements** lorsque :

- les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont *deux à deux* incompatibles : $\forall i, j \in [\![1;n]\!]$, $\left(i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\right)$
- l'union des évènements donne Ω : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exemples 3

E1 Si A est un évènement d'une expérience aléatoire, alors $(A, \overline{A})$est un système complet d'évènements (car $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$).

E2 Les évènements élémentaires forment un système complet d'évènements.

E3 On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6. Les évènements $\{1;3\}$, $\{5\}$ et "obtenir un nombre pair" forment un système complet d'évènements.

E4 On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6. Les évènements $A = \{1;3\}$ et B ="obtenir un nombre pair" ne forment pas un système complet d'évènements car

E5 On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6. Les évènements A ="obtenir un nombre inférieur ou égal à 3" et B ="obtenir un nombre supérieur ou égal à 3" ne forment pas un système complet d'évènements car

> Il est important de noter que tout ce qui a été vu jusqu'à présent n'a, à aucun moment, mentionné la notion de probabilité.
> Le travail sur les évènements est le fondement de toute réflexion probabiliste.

II Notion de probabilité et propriétés générales

II.1 Probabilité sur un univers

La définition qui suit est assez formelle, mais va permettre de généraliser la notion de probabilité vue au lycée... Cette généralisation sera cependant faite plus tard dans l'année.

Définition 4 - Probabilité

Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour tous évènements incompatibles A et B, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Dans toute la suite, on considère l'univers Ω d'une certaine expérience aléatoire, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements ainsi qu'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, notée $\mathbb{P}$.

Cette définition permet d'obtenir les propriétés suivantes :

Propriétés 2

Soient n un entier naturel non nul ainsi que $A, B, C, A_1, \dots, A_n$ des évènements.

P1# $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

P2# Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

P3# Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

P4# Si $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un système complet d'évènements, alors $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

P5# $\mathbb{P}(A)$ est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires inclus dans A.

P6# **Formules de Poincaré** (ou du crible) :

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

★ Démonstration :

⋆

Exemple 4

Dans une entreprise, 38% des employés parlent anglais, 26% parlent chinois, 20% parlent russe, 8% parlent anglais et chinois, 9% parlent anglais et russe, 4% parlent russe et chinois et 2% parlent les trois langues.
Quel est le pourcentage des employés qui ne parlent aucune de ces trois langues ?

Avec des notations évidentes, cela revient à calculer qui est égale à .

D'après la formule de Poincaré, on en déduit :

Conclusion : il y a des employés qui ne parlent aucune de ces trois langues.

II.2 Cas d'équiprobabilité...

Définition 5 - Équiprobabilité

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les évènements élémentaires de $\mathcal{P}(\Omega)$ ont même probabilité.

Dans ce cas, s'il y a n issues, alors chaque évènement élémentaire est de probabilité $\dfrac{1}{n}$ et pour tout évènement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant l'évènement A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemples 5

On lance deux dés cubiques, l'un rouge, l'autre noir, équilibrés et numérotés de 1 à 6...

E1 ... et on relève le couple formé des deux nombres obtenus. Les issues sont alors données par le tableau à double entrée suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6,1)
2	(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
3	(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
4	(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
5	(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
6	(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

Vocabulaire
C'est un exemple de **tableau à double entrée**.

et elles ont toutes la même probabilité d'apparaître : la situation avec cet univers est équiprobable.

E2 ... et on note la somme des deux nombres obtenus. L'univers est alors $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ et les issues de cet univers n'ont pas toutes la même probabilité d'apparaître ! En effet, $\mathbb{P}(\{2\}) = \dfrac{1}{36}$ alors que $\mathbb{P}(\{7\}) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ (cette probabilité s'obtient en utilisant le cas d'équiprobabilité lié à l'univers précédent ! Il y a 6 cas favorables à l'évènement "la somme des deux dés vaut 7" sur les 36 cas équiprobables). Ici, la situation avec cet univers n'est pas équiprobable.

✘ Attention !
L'équiprobabilité dépend donc du choix de l'univers...

III Probabilité conditionnelle

III.1 Définition

Propriété 3

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_A : B \longmapsto \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Important !
On retrouve la formule vue au lycée : $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.
A CONNAÎTRE !

★ Démonstration :

★

Définition 6 - Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements de Ω tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Le nombre défini par $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est appelé **probabilité conditionnelle de B sachant A.**

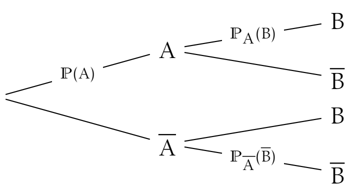
♡ Astuce du chef ! ♡
La définition donne directement que : si $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ sont non nuls, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.

Remarques

R 1. Puisque l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité, elle vérifie toutes les propriétés données dans les propriétés 2.

R 2. Quand on calcule $\mathbb{P}(A \cap B)$, on étudie le cas $A \cap B$ relativement à l'univers Ω... Alors que, quand on calcule $\mathbb{P}_A(B)$, on étudie le cas $A \cap B$ relativement à A (on fait comme si A était l'univers en fait).

Lien avec les arbres pondérés...



Ainsi, la relation $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ traduit la règle de calcul sur les arbres : **la probabilité associée à un chemin est le produit des probabilités des branches qui constituent ce chemin.**

✘ Attention !
Il faut bien interpréter correctement les données d'un exercice pour les placer correctement sur un arbre !

Exemples 6

E1 Une population est composée à 55% de femmes et 45% d'hommes. 17% des femmes mesurent plus de 1m80 alors que cela représente 32% des hommes. On choisit au hasard un individu et on note :

- F : "l'individu est une femme"
- T : "l'individu mesure plus de 1m80"

$\mathbb{P}_F(T) =$, $\mathbb{P}_F(\overline{T}) =$, $\mathbb{P}_{\overline{F}}(T) =$ et $\mathbb{P}_{\overline{F}}(\overline{T}) =$

$\mathbb{P}(F \cap T) =$

E2 Une entreprise fabrique des balles à l'aide de trois machines A, B et C. La machine A produit un tiers des balles et la machine B un quart des balles. 12% des balles produites par A, 9% des balles produites par B et 10% des balles produites par C ont un défaut. A la sortie des machines, les balles sont toutes mélangées. Avec des notations évidentes, voici les six probabilités qui sont données dans l'énoncé :

III.2 Deux formules importantes...

Formule des probabilités composées

Elle ne fait que généraliser la formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ à une intersection de n évènements...

Propriété 4 - Formule des probabilités composées

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$ ainsi que $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements.

Si $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times ... \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Petite remarque

En regardant la formule il faudrait comme hypothèse que les probabilités de tous les évènements par lesquels on conditionne soient non nulles. $\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k$ est inclus dans tous les précédents, le fait que sa probabilité soit non nulle garantit que les autres probabilités le sont également.

★ Démonstration : Se démontre facilement par récurrence. ★

Lien avec les arbres pondérés :

Exemple 7

On effectue trois tirages successifs et sans remise dans une urne composée de 5 balles vertes et 3 blanches.
Pour $n \in [\![1;3]\!]$, on note V_n : "obtenir une balle verte au tirage n". **Calculons la probabilité d'obtenir trois balles vertes à l'issue des tirages.**

La probabilité recherchée est . Or, d'après la formule des probabilités composées, on a :

✍ Rédaction

On pense à toujours écrire la formule !

Conclusion : la probabilité d'obtenir trois balles vertes est

Formule des probabilités totales

Propriété 5 - Formule des probabilités totales

Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ ainsi que $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements.
Si la famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un système complet d'évènements de Ω, alors, pour tout évènement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + ... + \mathbb{P}(A_n \cap B)$$

À retenir...

- Cas particulier important : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.
- Si toutes les $\mathbb{P}(A_i)$ sont non nulles, on obtient : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$

★ Démonstration :

Idée de la démonstration

Si on arrive à écrire $B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$ et à montrer que c'est une union d'évènements deux à deux incompatibles, c'est terminé.

★

Lien avec les arbres pondérés :

Exemple 8

On reprend le contexte de Exemples 6 - E2. **Déterminons la probabilité qu'une balle choisie au hasard en sortie d'usine présente un défaut.** Cela revient à calculer

Conclusion : la probabilité qu'une balle prise au hasard présente un défaut est

♡ Astuce du chef ! ♡

On pense à utiliser la FPT quand on demande la probabilité d'un évènement qui est *conditionné* par le passage par d'autres évènements ; autrement dit, quand il y a plusieurs façons d'obtenir cet évènement.

✍ Rédaction

On mentionne clairement le sce et on écrit des lignes de formules !

On peut combiner les deux formules ci-dessus pour donner la fameuse formule de Bayes... Ou bien tout simplement utiliser les deux formules précédentes à chaque fois !

Exemple 9

On reprend le contexte de Exemples 6 - E2. On tire au hasard une balle à la sortie de l'usine. Elle présente un défaut. **Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?**

Conclusion : la probabilité qu'une balle provienne de la machine A sachant qu'elle présente un défaut est

IV Indépendance d'évènements

Deux évènements (de probabilités non nulles) sont indépendants lorsque la réalisation de A n'est pas influencée par la réalisation de B et réciproquement. Autrement dit, lorsque $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$... Ce qui, dans les deux cas, donne $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Voici donc la définition choisie :

✘ Attention !

Ne pas confondre *indépendants* et *incompatibles*... Le temps qu'il fait dehors est indépendant du résultat du loto ; pourtant, il peut très bien faire un temps magnifique le jour où l'on gagne au loto !

Définition 7 - Indépendance de deux évènements

Deux évènements A et B sont **indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ lorsque : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

> ★Subtile...★
> Contrairement à l'incompatibilité, qui ne dépend que de l'univers, l'indépendance dépend également de la probabilité choisie...

Exemples 10

E1 Puisque $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, les évènements Ω et $\varnothing$ sont indépendants de tous les autres évènements.

E2 Une urne contient 12 balles numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard. **Les évènements A : "le nombre obtenu est pair" et B : "le nombre obtenu est un multiple de 3" sont-ils indépendants ?**

On a : $\mathbb{P}(A) =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(B) =$ $\qquad$ et $\mathbb{P}(A \cap B) =$

Conclusion : les évènements A et B

E3 Soit A un évènement de probabilité $p \in]0;1[$. **Les évènements A et $\overline{A}$ sont-ils indépendants ?**

Conclusion : les évènements A et $\overline{A}$

Et on retrouve la notion plus intuitive :

Propriété 6

Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On a :

A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$

★ Démonstration : Par double-implication...

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A et B sont indépendants, c'est à dire que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
Ainsi, puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
Or, par définition, $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$. On en déduit donc que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$: c'est à dire que A et B sont indépendants.

★

Propriété 7

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

★ Démonstration : Supposons que A et B sont deux évènements indépendants.
D'après la formule des probabilités totales avec le sce $(B, \overline{B})$: $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)$. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) && \text{par indépendance de A et B} \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) \\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \end{aligned}$$

Conclusion : si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

★

Avec n évènements, c'est un peu plus subtile car deux notions d'indépendance apparaissent alors :

Définitions 8 - Indépendances de n évènements

Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ ainsi que $A_1, A_1, \ldots, A_n$ des évènements.

D1# Les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** lorsque :

$$\forall i \neq j, \quad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$$

D2# Les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** lorsque :

$$\forall I \subset [\![1;n]\!],\ I \neq \varnothing \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

> En gros...
> L'indépendance mutuelle consiste à dire que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **2 à 2, 3 à 3, 4 à 4,... n à n indépendants** ! On voit ainsi bien que si les évènements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à eux indépendants. La réciproque est fausse en générale...

> Petite remarque
> En général, l'énoncé mentionnera simplement "les évènements sont indépendants", et cela sous-entendra l'indépendance mutuelle.

Exemples 11

E1 Un texte contient une faute d'orthographe. Ce texte est relu et on suppose qu'à chaque relecture, l'erreur est corrigée avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$. Les relectures sont indépendantes les unes des autres. On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k : "l'erreur n'est pas corrigée à la $k^{\text{ème}}$ relecture". **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que l'erreur ne soit pas corrigée au bout de n relectures ?**

Cela revient à calculer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$.

Par indépendance des A_k, on a ainsi : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Petite remarque
Ici, on utilise l'indépendance pour pouvoir calculer la probabilité d'une intersection. Cas très fréquent !

E2 On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6 : un dé rouge et un dé bleu. On considère les évènements suivants :

- A : "le nombre obtenu sur le dé rouge est pair"
- B : "le nombre obtenu sur le dé bleu est impair"
- C : "la somme des deux nombres obtenus est paire"

Les évènements A, B, C sont-ils deux à deux indépendants ? Mutuellement indépendants ?

Une dernière propriété :

Propriétés 8

Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ ainsi que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, B_i désigne soit A_i soit $\overline{A_i}$.

P1# Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants, il en est de même de $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

P2# Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même de $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

★ **Démonstration :**

P1# Découle de la propriété 7.

P2# ...

★

On retient surtout de cette partie :

$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \text{ uniquement quand A et B sont indépendants !}}$

V Notion de variable aléatoire

Pour terminer ce chapitre, voyons une notion qui a été abordée en lycée et que nous allons étudier davantage (et élargir) cette année. La notion de *variable aléatoire*.

Définition 9 - Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à chaque issue associe un nombre réel.

✎ Notation
On notera de façon abrégée les évènements :
- $[X = x] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\}$
- $[X < x] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) < x\}$
- $[X \in I] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in I\}$
- $[X = Y] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = Y(\omega)\}$
- ...

Puisque Ω ne contient qu'un nombre fini d'issues, $X(\Omega)$ (l'ensemble image de Ω par X, qui est l'ensemble des valeurs prises par X) ne contient également qu'un nombre fini de valeurs.

Dans toute la suite, X désigne une variable aléatoire sur Ω.

Vocabulaire
On dit qu'une variable aléatoire est :
- finie lorsque $X(\Omega)$ est fini,
- discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Également, puisqu'une variable aléatoire n'est autre qu'une application à valeurs réelles, on définit sans mal des opérations sur les variables aléatoires : multiplication externe, addition et multiplication internes...

V.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 10

La **loi de X** est la donnée de $X(\Omega)$ et de toutes les probabilités $\mathbb{P}([X=x])$ pour $x \in X(\Omega)$.

Dans le cas où $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$, on pourra parfois résumer cette loi dans un tableau :

Valeurs de X	x_1	x_2	...	x_n
Probabilités	$\mathbb{P}([X=x_1])$	$\mathbb{P}([X=x_2])$	...	$\mathbb{P}([X=x_n])$

Propriétés 9 - SCE associé à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète finie.

P1# La famille $\big([X=x]\big)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

P2# $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) = 1.$

♡ Astuce du chef ! ♡

P2 sert :
- soit à vérifier nos calculs
- soit à trouver une probabilité manquante

★ Démonstration :

★

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire finie X :**

- commencer par déterminer l'ensemble image $X(\Omega)$,
- écrire chaque évènement $[X=x]$ pour $x \in X(\Omega)$,
- calculer ensuite $\mathbb{P}([X=x])$ pour $x \in X(\Omega)$.

Exemple 12

On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier PILE. On convient que X prend la valeur 0 si aucun PILE n'apparaît.

- $\Omega =$
- $X(\Omega) =$
- **Écrivons les évènements suivants avec les issues :**

  $[X = 0] =$ $[X = 1] =$

  $[X = 2] =$ $[X = 3] =$

  Calculons maintenant les probabilités de ces évènements :

- Notons maintenant, pour $n \in [\![1;3]\!]$, P_n l'évènement "obtenir PILE au lancer numéro n" ; et **écrivons les évènements précédents à l'aide des évènements P_1, P_2, P_3 et leurs contraires.**

  $[X = 0] =$ $[X = 1] =$

  $[X = 2] =$ $[X = 3] =$

  Retrouvons les valeurs des probabilités de ces évènements :

V.2 Fonction de répartition

Définition 11 - Fonction de répartition

La **fonction de répartition de X**, notée F_X, est la fonction : $F_X : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X \leq x]) \end{array}$.

Petite remarque

Il est ainsi immédiat que la fonction de répartition est croissante, et que : $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.

Exemple 13

Représentons la fonction de répartition de la variable aléatoire X de l'exemple précédent :

Voici une propriété que nous reverrons cette année et qui sera particulièrement utilisée en 2ème année :

Propriété 10

La fonction de répartition caractérise la loi. Autrement dit, si X et Y sont deux variables aléatoires, alors :

X et Y ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction de répartition.

★ Démonstration : Par double-implication...

$\boxed{\Longrightarrow}$ C'est évident (si l'on connaît la loi, on connait la fonction de répartition) !

$\boxed{\Longleftarrow}$ Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$. On a ainsi :

- $\mathbb{P}([X = x_1]) =$
- $\forall i \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}([X = x_i]) =$

Puisque l'on peut retrouver la loi de X à partir de sa fonction de répartition, chaque fonction de répartition n'est associée qu'à une seule loi : c'est bien ce que l'on souhaitait établir.

★

Idée de la démonstration

Si l'on arrive à trouver une façon de retrouver la loi à partir de la fonction de répartition, on aura démontré le résultat !

V.3 Espérance

Définition 12 - Espérance

L'**espérance** de X est le nombre, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}([X = x])$.

Interprétation

$\mathbb{E}(X)$ est la *moyenne* de tous les $x \in X(\Omega)$, pondérée par les probabilités respectives de chaque valeur x.

Quelques propriétés, déjà rencontrées au lycée et naturelles :

Propriétés 11

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies. On a :

- **P1#** Si X est une variable aléatoire constante égale à $c \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) = c$.
- **P2#** $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ *(linéarité)*
- **P3#** Si X est à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. *(positivité)*
- **P4#** Si, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq Y(\omega)$, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$. *(croissance)*

> **Astuce du chef !** Pensez au comportement de votre moyenne si j'augmente toutes vos notes de 3 points ; ou si je les divise par 2...

★ Démonstration :

P1# Soit $c \in \mathbb{R}$. Si X est constante égale à c, alors $X(\Omega) = \{c\}$ et $\mathbb{P}([X = c]) = 1$... D'où $\mathbb{E}(X) = C$.

P2# Découle de la linéarité de la somme...

P3# Si X est à valeurs positives, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}([X = x])$ est une somme de termes positifs...

P4# Découle de P3 en considérant $Z = X - Y$... ★

Exemples 14

E1 **Calculons l'espérance de la variable aléatoire de l'exemple précédent.**

E2 Si G_1 est une variable aléatoire représentant le gain d'un jeu ; alors la variable aléatoire G_2, définie par $G_2 = G_1 + 5$, représente les gains augmentés de 5 et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_2) &= \mathbb{E}(G_1 + 5) \\ &= \mathbb{E}(G_1) + 5 \quad \text{par linéarité de l'espérance} \end{aligned}$$

V.4 Variance & écart-type

Définitions 13 - Variance & écart-type

- **D1#** La **variance** de X est le nombre, noté $\mathbb{V}(X)$, définie par : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$.
- **D2#** L'**écart-type** de X est le nombre, noté $\sigma(X)$, défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

> **Interprétation** La variance est la moyenne des écarts au carré entre X et son espérance : cela mesure la *dispersion* des valeurs de X : plus la variance est grande, plus les valeurs sont dispersées autour de l'espérance.

> **Petite remarque** L'écart-type est bien défini, car $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ est à valeurs positives, donc $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

Voici une formule qui, très souvent, facilitera le calcul de la variance :

Théorème 1 - Formule de Koenig-Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

★ Démonstration :

★

Comment calculer $\mathbb{E}(X^2)$? Grâce au théorème qui suit.

> **Vocabulaire** Le réel $\mathbb{E}(X^2)$ est appelé **moment d'ordre 2 de X**.

Théorème 2 - de transfert

Soient X une variable aléatoire discrète finie et $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

$$\mathbb{E}\left(f(X)\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}([X = x])$$

> **Important !** Le théorème de transfert permet d'obtenir l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$ sans rien connaître d'autre que la loi de X et l'application f. En particulier, inutile de chercher la loi de $f(X)$ pour calculer son espérance.

★ **Démonstration :** *(hors programme)*
Posons $Y = f(X)$ et remarquons déjà que Y est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (en effet, puisque $X(\Omega)$ est fini, $f\big(X(\Omega)\big)$ également) : Y est donc une variable aléatoire discrète finie.

- Soit $y \in Y(\Omega)$. Commençons par exprimer $\mathbb{P}([Y=y])$ à l'aide de la loi de X...
  D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=x]\big)_{x\in X(\Omega)}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=y]) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X=x]\cap[f(X)=y]\big)\\
&= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}\big([X=x]\cap[f(X)=y]\big) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)\neq y}} \mathbb{P}\big([X=x]\cap[f(X)=y]\big) && \text{si } f(x)\neq y, \text{ alors } [X=x]\cap[f(X)=y]=\varnothing\\
&= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}\big([X=x]\cap[f(X)=f(x)]\big) && \text{car } [X=x]\subset[f(X)=f(x)], \text{ donc } [X=x]\cap[f(X)=f(x)]=[X=x]\\
&= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}([X=x])
\end{aligned}$$

- Calculons maintenant l'espérance de Y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}([Y=y]) && \text{d'après ce qui précède}\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} y \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}([X=x]) && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} y\,\mathbb{P}([X=x])\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} f(x)\mathbb{P}([X=x])
\end{aligned}$$

  Reste à comprendre cette somme-double... Sommer ainsi revient à fixer un $y \in Y(\Omega)$, puis à sommer sur tous les antécédents de y. Puisque f est une application de $X(\Omega)$ dans $Y(\Omega)$, cela équivaut à sommer une et une seule fois pour chaque $x \in X(\Omega)$. Par conséquent :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}([X=X)])$$

  Autrement dit :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}([X=x])$$

★

★Subtile...★
On ne fait qu'expliquer en français l'égalité d'ensembles :
$X(\Omega) = \bigcup_{y\in Y(\Omega)} \{x\in X(\Omega) \,/\, y = f(x)\}$

Exemple 15

Reprenons l'exemple précédent et calculons $\mathbb{V}(X)$.

De ce qui précède, on déduit immédiatement :

Propriétés 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes finies. On a :

P1# $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\big(\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big)$

P2# $\forall a,b\in\mathbb{R} : \mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$; $\sigma(aX+b) = ...$

P3# $\mathbb{V}(X) = 0$ si, et seulement si, X ....

♡ Astuce du chef ! ♡
Si je soustrais 2 points à toutes les notes du dernier devoir, je ne change pas l'hétérogénéité de la classe : la variance est invariante par translation.

✘ Attention !
La variance n'est pas linéaire (à cause du carré dans la définition).

★ Démonstration :

★

V.5 Indépendance de variables aléatoires

Pour terminer, une définition qui n'est au programme qu'en deuxième année, mais que nous aurons tout de même l'occasion de rencontrer :

Définition 14 - Indépendance de VA

Soient X et Y deux variables aléatoires finies. On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ \ \mathbb{P}\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$